



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
Technion – Israel Institute of Technology

ספריות הטכניון
The Technion Libraries

בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס
Irwin and Joan Jacobs Graduate School

©

All rights reserved

*This work, in whole or in part, may not be copied (in any media), printed, translated, stored in a retrieval system, transmitted via the internet or other electronic means, except for "fair use" of brief quotations for academic instruction, criticism, or research purposes only.
Commercial use of this material is completely prohibited.*

©

כל הזכויות שמורות

אין להעתיק (במדיה כלשהי), להדפיס, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, להפיץ באינטרנט, חיבור זה או כל חלק ממנו, למעט "שימוש הוגן" בקטעים קצרים מן החיבור למטרות לימוד, הוראה, ביקורת או מחקר. שימוש מסחרי בחומר הכלול בחיבור זה אסור בהחלט.

תכנן אופטימלי של רשתות חלוקות מינה

חיבור על מוקד

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר
דוקטור למדעים

גדעון אייזר

הוגש לסנטר הספרותי - מכון טכנולוגי לישראל

ספטמבר 1991

חיפה

השרי תשנ"ב

תכן אופטימלי של רשתות חלוקת מים

חיבור על מחקר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר
דוקטור למדעים

גדעון אייגר

2121421



000003251249

הטכניון חכונ טכנולוגי לישראל



הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

ספטמבר 1991

חיפה

תשרי תשניב

למרים,
דגנית, שי, שירלי ודרור
על עזרתם וסבלנותם הרבה.

המחקר נעשה בהנחית פרופסור אהרון בן-טל ופרופסור אורי שמיר בפקולטה להנדסת תעשייה ונהול.

הרבה תודה לפרופסור אהרון בן-טל ולפרופסור אורי שמיר על על הנחיתם המעולה, על העזרה והתמיכה ועל האוירה הנעימה והחברית שליוותה עבודה זו מתחילתה ועד סופה והפכה את תקופת המחקר לחויה שתזכר לטוב.

תוכן הענינים

עמוד		פרק
1	תקציר	
3	רשימת סמלים וקיצורים	
7	מבוא	1
10	רשת חלוקת מים - בעית התכן האופטימלי	2
12	סקר ספרות	3
13	שיטות לפתרון סימולטני של עומדים וספיקות	3.1
14	פתרון פרוס הספיקות ביחס לפרוס עומדים קבוע	3.2
14	פתרון של פרוס העומדים יחסית לפרוס ספיקות ידוע	3.3
18	נסוח מודל מתימטי	4
24	אופטימיזציה לא חלקה	5
24	בעיות אופטימיזציה לא חלקות	5.1
25	שיטות לפתרון בעיות לא חלקות	5.2
29	אלגוריתם BT המקרה הקמור	5.3
30	אלגוריתם BT המקרה הלא קמור	5.4
31	אלגוריתם BT עם אילוצים ליניאריים	5.5
33	חישוב תת-גרדינט	6
33	הגרדינט המוכלל של פונקציות שוליות (marginal)	6.1
35	המקרה של בעית תכנות ליניארי פרמטרי	6.2
37	חישוב תת-גרדינט בבעית התכן	6.3
38	בסיס תיאורטי לפתרון הבעיה	7
38	הבעיה הדואלית	7.1
42	צמצום פער הדואליות	7.2
48	אלגוריתם לפתרון גלובלי של הבעיה	8
49	קלט	8.1
51	חיפוש גלובלי	8.2
53	קריטריון לאתור נקודות התחלה עבור חיפוש מקומי	8.3
53	שפור הדיוק - איסטרטגיה	8.4
54	פלט - תכולה	8.5
55	אלגוריתם	8.6
59	הרחבות של המודל	9
59	שילוב משאבות ומאגרי ווסות	9.1
61	תכנון לשני מצבי עומס	9.2
62	הוספת אילוץ	9.3
64	דוגמאות מספריות	10

תוכן הענינים (המשך)

עמוד		פרק
65	"TWO-LOOP" בעיה מס. 1	10.1
72	"HANOI" בעיה מס. 2	10.2
83	"COMPLEX-TWO-LOOP" בענה מס. 3	10.3
89	"BIG" בעיה מס. 4	10.4
100	סיכום ומסקנות	11
101	נספח א. תכנית המחשב של האלגוריתם (פורטרן)	
127	רשימת מקורות	

תקציר.

רשת חלוקת מים (water distribution network) הנה מערכת של אלמנטים הידראוליים שמטרתה להעביר כמויות מים ממקורות אל צרכנים, תוך קיום אילוצי ספיקה ועומד. הרשת מתוארת בדרך כלל ע"י גרף בו מיצגים הצמתים את המקורות והצרכנים והצלעות מיצגות את מערכת העברת המים (צנרת, משאבות ואביזרי עזר). הבעיה הכללית של תכנון הרשת, מתחלקת לשלושה שלבים:

1. שלב התכנון הבסיסיבו מוגדרת הרשת, נקבעים המקורות והצרכנים וערכי הפרמטרים הרלבנטים שלהם (ספיקות, צריכה, תחומי עומד מותרים וכ"ז).

2. שלב התכן ההנדסי. בשלב התכן יש לקבוע על פי ההגדרות והנתונים הנקבעים בשלב התכנון הבסיסי ובהתחשב בתנאי התפעול הצפויים, את המערכת הפיזית של כל הרכיבים המרכיבים את הרשת (סוגי וקטרי צנורות, גודל וסוג משאבות, גובה ממוצע של רום המים במאגרים, מיקום שסתומים וכ"ז).

3. שלב התפעול בו נקבע משטר התפעול האופטימלי של הרשת.

שלושת שלבי התכנון תלויים הדדית ומשפיעים זה על זה. התכנון הכללי נעשה בדרך כלל באיטרציות בין שלושת השלבים.

בעבודה זו נטפל בבעיית התכן בלבד. ינוסח ויפתר מודל מתמטי של הבעיה, בהנחה שבשלב הראשון (תכנון בסיסי) נקבעו כבר כל הנתונים הדרושים ותנאי התפעול העתידיים ידועים. אפשר לראות פתרון כזה כאיטרציה בפתרון הבעיה הכללית.

משנתי החלטה בנסוח שלנו הם:

1. וקטור x שרכיביו הם האורכים של קטעי הצנרת עבור כל קוטר אפשרי, בכל צלעות הרשת, תוספת העומד שמתקבלת בתחנות השאיבה וכן התוספת לרום הממוצע של המים במאגרים.

2. וקטור q שרכיביו מהווים את פרוש הזרימה בצלעות הרשת. רכיבי q יקבעו בגדל וכיוון תוך תהליך הפתרון. בעיית התכנון המתמטי המיצגת את התכן האופטימלי, מאופינת ע"י התכונות הבאות:

1. הבעיה היא לא קמורה ולא חלקה.

2. עבור כל וקטור אפשרי נתון - q , הבעיה היא ליניארית במשתנה x .

סקירת השיטות הקימות לטפול בבעיית התכן, מעלה ארבעה קשיים עיקריים איתם ניסינו להתמודד בעבודה זו:

1. נסיונות לפתור את הבעיה סימולטנית בשני המשתנים (בעיה חלקה) נכשלים במקרים רבים עקב מימד גבוה.

2. בעיות הנובעות מניסוח הכולל הפרדת הפתרון לשני שלבים (דקומפוזיציה) הן בדרך כלל לא חלקות ודורשות שמוש בשיטות של אופטימיזציה לא חלקה.

3. כמעט כל השיטות (למעט נסיונות חלקיים בשנים האחרונות) הסתפקו במציאת פתרונות מקומיים (בדרך כלל לא אופטימליים) ולא התמודדו עם הבעיה של מציאת פתרון גלובלי. תהליך של חיפוש גלובלי נדרש עקב אי

הקמירות של הבעיה. יתר על כן, לא טופלה כלל הבעיה של מציאת חסמים לצורך הערכת טיב הפתרון המתקבל.

4. בשיטות הקימות, כוון הזרימה בקטעי הרשת נקבע מראש ולא ניתן לשינוי במהלך הפתרון. מצב זה מגביל באופן ניכר את תחום הפתרונות האפשריים וגורם לאבוד אפשרי של פתרונות פוטנציאליים טובים.

תרומת עבודה זו מתבטאת בהתגברות על החסרונות הנזכרים. מוצע אלגוריתם אשר מיצר פתרון מקורב לאופטימום הגלובלי ובמקביל מציג חסם הדוק המאפשר להעריך את שגיאת הקירוב ולצמצמה.

על מנת להגיע לתוצאות אלו, נדרשנו להתגבר על שתי בעיות בסיסיות הקשורות בקבלת חסם הדוק:

1. פתרון יעיל של בעיה דואלית שהיא בעצמה בעיה קשה הכוללת מספר אינסופי של אילוצים. 2. מציאת דרך אפקטיבית לצמצום הפער הקים בין הפתרונות האופטימליים של הבעיה הפרימלית והדואלית עקב אי הקמירות (פער הדואליות).

שתי בעיות אלו נפתרו תוך ניצול תכונות מתמטיות המאפיינות את המודל. בפועל, כלי האופטימיזציה הבסיסי הוא תכנת ליניארי. התהליך המבצע את החיפוש הגלובלי ומייצר את החסם ההדוק הוא מטיפוס של "סעף וחסום" (*branch and bound*).

בתהליך הפתרון, יש צורך לפתור (מקומית) בעיות לא חלקות ולא קמורות. לצורך זה השתמשנו באלגוריתם מטפוס Bundle-Trust.

שיטת הפתרון שפיתחנו נבחנה על מספר בעיות דוגמה הלקוחות מהספרות והשונות זו מזו במימדיהן ובמורכבותן. השיטה פעלה בהצלחה בכל הדוגמאות שטופלו אולם, כפי שנתן לצפות, הזמן הנדרש לפתרון גלובלי מוכח של בעיות גדולות, עד רמת דיוק גבוהה (למשל דיוק של 1%), הוא רב יחסית. עבור מקרים כאלה גיבשנו איסטרטגיה משפרת ונעשה שמוש בפרמטרים של בקרה העשויים (אחרי כוונון מתאים) להביא לקיצור הזמנים ולשפור הבצועים של האלגוריתם.

האלגוריתם איננו רגיש לפתרונות התחלתיים ואין הגבלה על שינוי בכיוון הזרימה של רכיבי הוקטור q . מסתבר כי השיטה שפיתחנו איננה מוגבלת לפתרון בעית התכנן וניתן להשתמש בה גם עבור בעיות שמקורן שונה לחלוטין, בתנאי שמתקיימות בהן מספר תכונות שהחשובות בהן: מונוטוניות וספרביליות של האילוצים הדואליים.

רשימת סמלים וקיצורים.

1. בפרק 4. מודל מתמטי של בעיית התכן.

n	- מספר הצמתים ברשת.
e	- מספר הצלעות ברשת.
l	- מספר מעגלים בסיסיים ברשת.
k	- מספר מסלולים בין צמתים עם אילוץ על הפסדי עומד מותרים על פניהם.
m	- מספר קטרי צנורות מסחריים אפשריים.
s	- מספר קטעי צנרת במודל. ($s = e \cdot m$)
$h \in \mathbb{R}^n$	- וקטור גבהים (מ') של צמתים, ביחס לנקודת ייחוס נתונה.
$t \in \mathbb{R}^m$	- וקטור הקטרים האפשריים לשמוש (אינטש).
$u \in \mathbb{R}^n$	- וקטור עומדים מינימליים נדרשים בצמתים (מ').
$p \in \mathbb{R}^k$	- וקטור הפסדי עומד מכסימליים מותרים על פני המסלולים (מ').
$d \in \mathbb{R}^n$	- וקטור הספיקות (ביקושים) בצמתים (מ'ק לשעה). ($d < 0$ מקורות, $d > 0$ צרכנים).
$a \in \mathbb{R}^e$	- וקטור אורכי הצלעות ברשת (מ').
$c \in \mathbb{R}^s$	- וקטור מחירים (s) ליח' אורך צנור בקטעים ברשת.
L	- מטריצת חילה (מכוונת) ($l \times e$) של צלעות על מעגלים בסיסיים.
P	- מטריצת חילה (מכוונת) ($k \times e$) של צלעות על מסלולים.
O	- מטריצה ($e \times s$) הקובעת את סדר הקטעים על פני הצלעות.
$J(q)$	- מטריצה אלכסונית ($s \times s$). האיבר ה- i באלכסון נותן את הפסד הלחץ על פני יח' אורך של הצינור בקוטר המתאים לקטע הנמצא במקום ה- i , כאשר הזרימה בצלע המתאימה היא q_j .
D	- מטריצת חילה (מכוונת) ($n \times e$) של צלעות על צמתים.
$x \in \mathbb{R}^s$	- וקטור אורכי הקטעים ברשת.
$q \in \mathbb{R}^e$	- וקטור הזרימות. q_j הוא חיובי אם הזרימה בצלע j היא בכיוון הצלע.
Q	- קבוצת הוקטורים q המקיימים חוק שמור הזרימה בצמתים.
$\varphi(q)$	- פונקצית הערך האופטימלי של הבעיה הפנימית במודל דקומפוזיציה.
$\delta \in \mathbb{R}^1$	- וקטור זרימות טבעיות.
$\Delta \subset \mathbb{R}^1$	- קבוצת וקטורים δ .
q^0	- וקטור התחלתי של זרימות.

2. בפרק 5 אופטימיזציה לא חלקה.

$\partial f(x)$	- קבוצת הגרדינט המוכלל (במשמעות של Clarke).
$\text{conv}(A)$	- הקמור של קבוצת וקטורים A .
J_k	- קבוצת אינדקס של תת-גרדינטים באיטרציה k של אלגוריתם מסוג "bundle".
g_i	- תת-גרדינט i בחבילת תת-גרדינטים.
α_i^k	- שגיאת הלינאריזציה של הכוון הנקבע לפי תת-גרדינט g_i בנקודה x_k .

-	λ_i	הכופל ה- i בקומבינציה קמורה של חבילת תת-גרדינטים.
-	d_k	וקטור כיוון חיפוש באיטרציה k .
-	$f'(x, d)$	הנגזרת הכונית של הפונקציה f בנקודה x לכיוון d .
-	$f'_\epsilon(x, d)$	הנגזרת ה- ϵ כונית.
-	$\hat{f}(x)$	מודל cutting plane של הפונקציה f בנקודה x .
-	ρ_k	רדיוס הכדור המגביל את הנורמה של וקטור הכוון בשיטת trust-region באיטרציה k .
-	X^*	קבוצת הפתרונות האופטימליים.
-	ϕ	הקבוצה הריקה.

3. בפרק 6 חישוב תת-גרדינט.

-	$I(x)$	קבוצת אינדקס של האילוצים האקטיביים.
-	$\nabla_x f$	הגרדינט החלקי לפי x של הפונקציה f .
-	ℓ	פונקצית הלגרנגיאן.
-	g	תת-גרדינט של פונקצית הערך האופטימלי במודל דקומפוזיציה של בעית התכן.

4. בפרק 7 בסיס תאורטי.

-	Z	מטריצת האילוצים.
-	b	וקטור צד ימין.
-	y	וקטור המשתנים הדואליים.
-	$\vartheta(y)$	פונקצית המטרה הדואלית.
-	(D)	הבעיה הדואלית.
-	Y_Q	קבוצת הפתרונות האפשריים בבעיה הדואלית כאשר הוקטורים q הם בקבוצה Q .
-	$\hat{q}^i, i = 1, 2$	הוקטורים המחליפים את הקבוצה Q בבעיה הדואלית השקולה.
-	Q_Δ	קבוצת הוקטורים q המושרית ע"י הקבוצה Δ .
-	$\tau_x(q)$	האילוץ הדואלי ה- k עם וקטור q .
-	g_Δ	הערך האופטימלי של הבעיה הדואלית בהנתן הקבוצה Δ .
-	β_Δ	פער הדואליות בהנתן הקבוצה Δ .
-	f_Δ^*	הערך האופטימלי של הבעיה הפרימלית בהנתן הקבוצה Δ .
-	$\{\Delta_i\}_{i=1}^k$	חלוקה של Δ ל- k חלקים.
-	\bar{I}_k	קבוצת אינדקס לחלקים ב- Δ בהם הערך האופטימלי הדואלי הוא מינימלי.
-	B_1	כדור היחידה במרחב R^1 .
-	δ^*	וקטור אופטימלי בבעיה הפרימלית.

5. בפרק 8 אלגוריתם.

- $f \min^*$ הערך האופטימלי הגלובלי של (P2).
- $f \min$ הערך הטוב ביותר שנמצא עבור פונקצית המטרה הפרימלית.
- $f \min^k$ הערך הטוב ביותר שנמצא עבור פונקצית המטרה הפרימלית אחרי חפוש מקומי k.
- B חסם תחתון גלובלי ל- $f \min^*$.
- B^n חסם תחתון גלובלי אחרי איטרציה חיצונית n.
- ε הדיוק הנדרש באחוזים. $\varepsilon = (f \min^* - B) \cdot 100 / f \min^*$.
- ε_0 הדיוק המבוקש באחוזים באיטרציה חיצונית ראשונה.
- ε^n הדיוק המבוקש באחוזים באיטרציה חיצונית n.
- $\bar{\varepsilon}^n$ הדיוק שהושג באחוזים אחרי איטרציה חיצונית n. $\bar{\varepsilon}^n = (f \min^k - B^n) \cdot 100 / f \min^k$.
- gap^n הפער המותר בין ערך הפתרון לחסם באיטרציה חיצונית n. משמש כקריטריון בין מצב "סעף" למצב "חסום".
- l רמת הסעוף בעץ החלוקות.
- k מונה למספר החפושים המקומיים.
- m מספר החלקים בחלוקה סטנדרטית של התיבה הנוכחית.
- Δ^l התיבה הנוכחית ברמת סעוף l.
- g_{Δ} ערך הפתרון האופטימלי של הבעיה $(D)_{\Delta}$.
- Δ_i החלק ה-i בחלוקה של Δ .
- \bar{i} האינדקס של תת-הקבוצה ב- Δ^l עבורה התקבל הערך האופטימלי הדואלי הנמוך ביותר.
- n מונה לאיטרציות חיצוניות. איטרציה חיצונית היא חזרה על תהליך הפתרון עם עדכון של הדיוק הנדרש והקבוצה Δ_0 .
- nmax מספר מכסימלי של איטרציות חיצוניות.
- c אורך הענף הנוכחי בעץ החלוקות. משמש לבדיקת קריטריון לבצוע חפוש מקומי.
- cmax פרמטר המשמש בקריטריון להחלטה על חפוש מקומי.
- tmax מגבלת הזמן לריצה.
- α מספר בין אפס לאחד. הוא האחוז הנלקח מהשינוי המקסימלי של q הנקבע לפי שטח החישוב של Δ_0 .
- τ_1 מספר בין אפס לאחד. מקדם הקטנה ל- ε^n בכל איטרציה חיצונית נוספת.
- τ_2 מספר בין אפס לאחד. מקדם הקטנה ל- α בכל איטרציה חיצונית נוספת.

שגרות:

DEL(q^0, α) - מציאת Δ_0 עבור q^0 נתון כאשר לוקחים $\alpha \cdot 100$ אחוזים מתחום השינוי המלא הנקבע מצורת

החישוב של Δ_0 .

LOC(δ) - חפוש מקומי עם δ כנקודת התחלה.

- PART(Δ) - חלוקה של התיבה הנוכחית Δ ל- m תיבות. השגרה כוללת מציאת הצלע הגדולה ביותר של Δ וקבלת m תיבות ע"י חלוקת צלע זו ל- m חלקים שווים.
- DUAL(Δ) - פתרון הבעיה הדואלית $(D)_{\Delta_i}$ לכל חלקי Δ בחלוקה הנוכחית.
- MIN(Δ) - מציאת \bar{i} והערך g_{Δ_i} .
- CHANGQ(δ) - שגרה המחליפה את q^0 ב- $q(\delta)$.

1 מבוא.

רשת חלוקת מים (water distribution network) מוגדרת כמערכת של אלמנטים הידראוליים (מאגרים, צנורות, משאבות, שסתומים וכיו) המשולבים באופן שיוכלו להעביר כמויות נדרשות של מים בתחום מוגדר של עומדים הידראוליים (לחצים) ממקורות אל צרכנים באמינות מוגדרת ובתנאי תפעול נתונים.

הרשת מתוארת בדרך כלל ע"י גרף בו מיצגים הצמתים את המקורות והצרכנים, הצלעות מיצגות את הצנרת ואביזרי העזר המשמשים להעברת המים ובקרת הזרימה והעומד. בעבודה זו נטפל ברשתות הכוללות מעגלים קיום מעגלים נובע מההנחה (הקשורה לאמינות הרשת) שכל צרכן יכול לקבל מים משני כוונים לפחות.

הבעיה הכללית של תכנון הרשת מתחלקת לשלושה שלבים התלויים זה בזה:

1. שלב תכנון בסיסי במסגרתו מגדירים את מטרות הרשת, את המקורות והצרכנים, הטופולוגיה של הרשת ותנאי התפעול בהם היא אמורה לעמוד.

2. שלב התכן ההנדסיבו מתכננים את המרכיבים הפיזיים של הרשת.

3. שלב קביעת מדיניות התפעול.

שלושת השלבים תלויים זה בזה ומשפיעים זה על זה והתכנון הכולל מתבצע בדרך כלל באיטרציות בין המרכיבים של הבעיה הכללית. הבעיה הנדוניה ונפתרת בעבודה זו היא בעית התכן. בהנחה שהרשת הוגדרה וידועות הטופולוגיה והטופוגרפיה שלה (מיקום צמתי מקור וצריכה, המרחקים ביניהם והגבהים היחסיים) וכן ידועים הבקושים למים ותנאי התפעול הצפויים, יש למצוא את המערכת הפיזית האופטימלית, כלומר כזו שתקיים את אילוצי הספיקה והעומד בעלות הנמוכה ביותר האפשרית.

בעית התכן האופטימלי של רשתות מים מעסיקה חוקרים רבים ומהנדסים מזה שנים רבות והיא בעלת חשיבות רבה הן מבחינה מעשית והן מבחינה תאורטית. ההשקעות הכספיות הגדולות הכרוכות בהקמת רשתות חדשות או בשפור הבצועים והרחבה של רשתות קימות, הווי בעבר כמו גם עתה הצדקה למאמץ מחקרי נכר שמטרתו לשפר את שיטות התכנון ולהפכן לכלים מעשיים בידי המהנדסים. במשך השנים פותחו שיטות שונות ומגוונות: החל משימוש רב באינטואיציה ונסיון הנדסי תוך ניסוי וטעייה וכלה בשיטות אופטימיזציה מודרניות. המודלים המתמטיים אשר נוסחו לייצוג הבעיה הם רבים ונבדלים זה מזה במורכבותם, בהנחות היסוד, במשתני ההחלטה ובמגבלות והאילוץ המובאים בחשבון. מובן שכלל שהמודל מציאותי יותר כן הוא מורכב יותר, עוסק ביותר אלמנטים תיכנוניים וקשה יותר לפתרון.

עד היום טרם נמצאו שיטות ישימות לתקיפה של בעית התכן בשלמותה ומציאת פתרון גלובלי שלה. כל השיטות הקיימות מניחות הנחות מפשטות ומטפלות בחלקים של הבעיה כאשר החלקים החסרים מטופלים בנפרד. התוצאה היא קבלת פתרונות אפשריים סבירים אבל בדרך כלל תת-אופטימליים. בעבודה זו, מנוסח תחילה ונפתר מודל המייצג את בעית התכן של רשת פשוטה המוזנת גרויטציונית ללא משאבות ומאגרים. בשלב שני מורחב המודל לרשתות מורכבות יותר הכוללות אלמנטים הידראוליים נוספים (משאבות, מאגרים).

המודל המייצג את הבעיה (בנסוח המשמש אותנו כאן), הוא לא קמור (nonconvex) ולא חלק (nonsmooth). עובדות אלה ממקמות את הטפול בו מצד אחד בתחום של אופטימיזציה גלובלית, ומצד שני בתחום האופטימיזציה הלא חלקה (nonsmooth).

אף כי המודל הנפתר נוסח כבר לפני שנים ושמש חוקרים אחרים בעבר, הרי שעד כה לא הובאה אי החלקות

בחשבון ונעשה שמוש בכלים של אופטימיזציה חלקה (שיטות גרדינט) בלבד. במסגרת עבודה זו מוצג נסיון ראשון, למיטב ידיעתנו, לשמוש בשיטות אופטימיזציה לא חלקות לשם מציאת פתרונות מקומיים של מודל זה. בעיות אופטימיזציה לא חלקות מופיעות באופן טבעי במספר רב של תחומי מחקר ותכנון. התאוריה של אופטימיזציה לא חלקה היא חדשה יחסית והתפתחותה פיגרה במדה נכרת אחרי התאוריה של אופטימיזציה חלקה. מצב זה התקיים גם בתחום של פתוח כלים נומריים (אלגוריתמים) לפתרון בעיות לא חלקות. כיום עומדות לרשותנו מספר שיטות המאפשרות פתרון בעיות אופטימיזציה לא חלקות קמורות ולא קמורות, מאולצות (ליניאריות) ולא מאולצות. אפשר להראות כי הנסיון לפתור בעיות לא חלקות תוך שמוש בשיטות גרדינט, יכול להביא להתכנסות לנקודות לא אופטימליות לכן הפעלת שיטות לא חלקות היא הכרחית כאן. עבודה זו עוסקת בבעיה השיכת לתחום של אופטימיזציה גלובלית. תחום זה כולל את המקרים בהם לפונקצית המטרה ישנן מספר נקודות מינימום מקומי השונות זו מזו בערך פונקצית המטרה בהן. כזהו המצב, למשל, כאשר בעית האופטימיזציה איננה קמורה. אלגוריתמים המבוססים על שיטות גרדינט (תת-גרדינט במקרים לא חלקים) מנצלות קיום תנאים הכרחיים למינימום מקומי למציאת נקודות כאלה אך הנקודה אותה מוצא האלגוריתם תלויה בנקודת ההתחלה במקרים שיש יותר מנקודת מינימום מקומי אחת. על מנת למצוא ערך אופטימלי גלובלי יש לבצע תהליך של חיפוש גלובלי. מאחר שאין ידועים תנאים למינימום גלובלי, יש למצוא חסם תחתון שיהווה הערכה לטיב הפתרון שהתקבל. חיפוש גלובלי מתבסס במקרים רבים על חלוקת המרחב (partition), ושמוש באחת השיטות של "Branch and Bound". דיון כללי בנושא אופטימיזציה גלובלית ישנו למשל ב-[53]. שם גם מתוארים באופן כללי הרעיונות של חלוקה ו-"Branch and Bound".

טכניקה כזו ננקטת גם בעבודה זו.

עד עתה נעשו נסיונות מעטים בלבד לטיפול גלובלי בבעית התכן וגם אז, לפי מיטב ידיעתנו, לא נמצאו חסמים המאפשרים הערכה של טיב הפתרון המתקבל. בעבודה זו מוצעת גישה אשר מנצלת תכונות מתמטיות של המודל לשם בנית אלגוריתם המוצא פתרון גלובלי מקורב וחסם תחתון הדוק. הפער היחסי בין החסם לבין ערך הפתרון המתקבל אינו עולה על גודל הנבחר מראש עיי המתכנן. בעית התכן נפתרת גלובלית עיי שילוב של שיטת פתרון לא חלקה למציאת מינימום מקומי עם תהליך של "סעף וחסום" (branch and bound) אשר מיצר חסם תחתון הדוק. במקביל, מספק התהליך נקודות התחלה מביטוחות עבור סדרה של חיפושים מקומיים המשפרים את ערך פונקצית המטרה. השטה המוצעת מתאפשרת הודות לפתרון של שתי בעיות בסיסיות:

1. מציאת פתרון יעיל וזול של בעיה דואלית מתאימה לבעיה הפרימלית המיוצגת עיי המודל. 2. מציאת שטה להקטנת הפער הקיים בין הפתרונות האופטימלים של הבעיה הפרימלית והדואלית מכיון שהבעיה איננה קמורה (פער זה קרוי פער דואליות (duality gap)). עבור 1. אנחנו מנסחים בעיה דואלית בעלת פונקצית מטרה ליניארית ומספר אינסופי של אילוצים ליניאריים ומראים כי בעיה זו שקולה לבעיה ליניארית רגילה עם מספר סופי של אילוצים. השקילות נובעת ממבנה מיוחד של האילוצים הדואליים:

מסתבר שכל אילוץ דואלי תלוי באופן מונוטוני באחד ורק אחד מהמשתנים הפרימליים. קיום התכונה של מונוטוניות וספרביליות כנ"ל, גוררת את השקילות האמורה. מספר האילוצים בבעיה הדואלית השקולה הוא יחסית קטן והיא נפתרת עיי תוכנה מסחרית של LP.

עבור 2. אנחנו מנצלים תכונות רציפות של המיפוי המגדיר את קבוצת הפתרונות האפשריים בבעיה הפרימלית ומראים כי אפשר לקבל הקטנה של פער הדואליות עיי טכניקת העדנה מתאימה של חלוקות של מרחב המשתנים

הפרימליים. תוצאה זו מנוצלת לבניית אלגוריתם מטפוס של "סעף-וחסום". האלגוריתם מיצר סדרה משפרת של ערכי פונקצית המטרה הפרימלית ובמקביל סדרת חסמים ההולכים ומתהדקים. האלגוריתם נוסה על מספר בעיות דוגמה השונות זו מזו במימדיהן ובמדת מורכבותן.

ענין ייצור החסמים וצמצום יעיל של פער הדואליות ראוי להדגשה מיוחדת מכיון שכפי שמסתבר בדיעבד, מושקע החלק העקרי של הזמן הכולל לפתרון הבעיה, בהדוק החסם (בדרך כלל מוצא האלגוריתם ערכים הקרובים לערך האופטימלי הגלובלי, בשלב מוקדם יחסית).

תרומה נוספת של עבודה זו היא בכך שכוון הזרימה ברשת איננו נקבע מראש והוא מהקבל כחלק מהפתרון. הבעיה של כוונני זרימה לא מוגבלים היא בעלת חשיבות רבה לצורך מציאת פתרון גלובלי. ברור כי קביעה (שרירותית) של כיוון הזרימה מגבילה במדה ניכרת את מרחב הפתרונות האפשריים ואין בעצם כל דרך להעריך את מחיר הויתור.

השיטה שפותחה לשם פתרון בעית התכן היא, במובנים מסוימים, כללית יותר ועשויה לפתור גם בעיות אחרות בתנאי שמבנה המודל המייצג אותן מקיים מספר תנאים. נדון בענין זה ביתר הרחבה בפרק הסיכום.

לסיום המבוא נציג תאור כללי של מבנה העבודה:

בפרק 2 מוגדרת פורמלית רשת חלוקת מים ומנוסחת מילולית בעית התכן האופטימלי. בפרק 3 מובא סקר ספרות קצר המתאר את השיטות והגישות הקימות לפתרון בעית התכן. בפרק 4 אנחנו מנסחים מודלים מתמטיים המייצגים את הבעיה. פרקים 5 ו-6 מוקדשים לסקירה תמציתית של גישות קימות לפתרון בעיות אופטימיזציה לא חלקות עם דגש על האלגוריתם שנבחר לשימוש בעבודה זו. פרק 7 מציג את הבסיס התאורטי לפתרון המוצע. בפרט, מודגשות התכונות המתמטיות המאפיינות את מבנה המודל והמאפשרות את השמוש בשיטה המוצעת. בפרק 8. מוצג בפירוט האלגוריתם שפיתחנו לפתרון הבעיה. בפרק 9 אנחנו מרחיבים את המודל כך שיכלול אלמנטים הידראוליים נוספים ובכך מתאפשר הטפול בבעיות יותר מציאותיות. פרק 10. מציג תוצאות מספריות של פתרון בעיות דוגמה עליהן עבדנו. סכום, מסקנות ותאור התרומה של עבודה זו, בפרק 11.

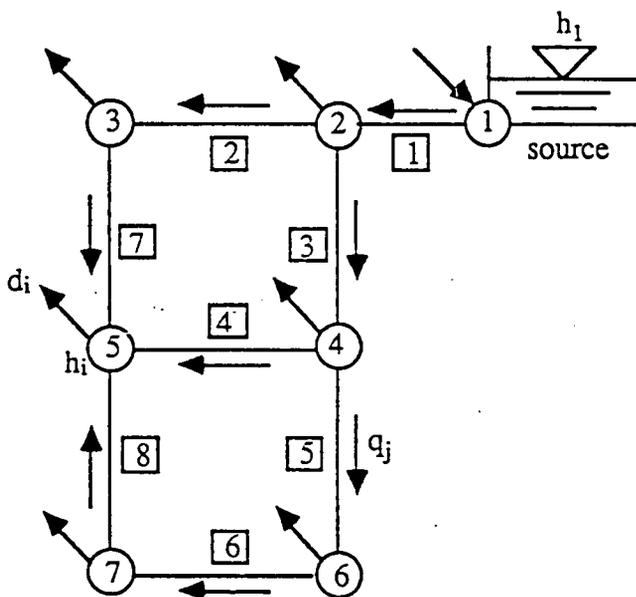
2 רשת חלוקת מים - בעית התכן האופטימלי.

הגדרה:

רשת חלוקת מים הינה מערכת של אלמנטים הידראוליים (צנורות, משאבות, מאגרי עזר, שסתומים וכיו) הערוכים להעברת כמויות נדרשות של מים מקבוצה של מקורות עם ספיקות ולחצים נתונים אל קבוצה נתונה של צרכנים, בתחום מוגדר של ספיקות ולחצים נדרשים, תוך שמירה על רמת אמינות מוגדרת.

בעית התכן האופטימלי של הרשת:

נתונה רשת חלוקה המתוארת כגרף הכולל מעגלים (משקולי אמינות), כאשר הצמתים מיצגים מקורות מים וצרכנים והצלעות מיצגות את קווי הצנרת המיועדת להעברת המים ואלמנטים הידראוליים אחרים (משאבות, מאגרי עזר וכיו). (ראה שרטוט מס' 2.1).



שרטוט מס. 2.1: דוגמה לרשת חלוקה פשוטה המוזנת באופן גרויטציוני ממקור יחיד.

Fig. no. 2.1: A simple gravitational network with one source.

בשלב התכן נתונים:

1. טופולוגיה וטופוגרפיה של הרשת (מיקום וגבהים יחסיים של הצמתים).
 2. תחומי ספיקה ועומד הידראולי (לחץ) קיימים (במקורות) או נדרשים (אצל צרכנים).
 3. אורכי הצלעות (מרחקים בין צמתים).
 4. סוגי צנורות וקבוצה (דיסקרטית) של קטרים אפשריים (קיימים).
 5. רשימת אביזרים הידראוליים אפשריים אחרים.
 6. כמו כן נתונים מחירי האביזרים והצנרת לסוגיהם וערכים כלכליים רלבנטיים לחישוב עלויות השקעה, תחזוקה ותפעול (שערי ריבית, מחירי אנרגיה וכו').
- כל המעגלים בגרף המיצג את רשת חלוקת המים ניתנים להצגה כקומבינציה ליניארית של קבוצת מעגלים בסיסית כלשהי (בדרך כלל יש קבוצות רבות כאלה). מתורת הגרפים (ראה [7] Deo) ידועה התוצאה הבאה: אם ישנם בגרף n צמתים ו- e צלעות אזי עבור כל עץ פורס של הגרף, מגדיר כל מיתר המתוסף לעץ מעגל יחיד. בסיסהי ניתן להוסיף לכל עץ פורס $l = e - n + 1$ מיתרים וזהו המספר המכסימלי של מעגלים בסיסיים בגרף. ניתן להראות ([7] Deo, [21] Kessler) כי כל המעגלים בגרף מתקבלים כקומבינציות ליניאריות של קבוצה בסיסית. עבור גרף נתון ניתן לאתר קבוצה בסיסית של מעגלים בעזרת עץ פורס כלשהו. בנסוח המודל המתמטי של בעית התכן (פרק 4 להלן) נעשה שמוש חשוב בקבוצת מעגלים בסיסיים בגרף של הרשת.

בעית התכן האופטימלי של הרשת ניתנת להצגה מילולית באופן הבא:

בהנתן כל האמור לעיל (סעיפים 6-1), מצא את הרשת הזולה ביותר כך שיתקימו אילוצי ספיקה ולחץ בכל צמתי מקור וצריכה, עבור אחד או יותר מצבי תפעול מוגדרים.

ניתן לשלב בבעיה גם שיקולי אמינות אך הדבר מצריך הגדרה מפורטת וקריטריונים הניתנים לייצוג במודל מתמטי. נושא זה לא טופל בעבודה זו מעבר לדרישה של הזנה אפשרית משני כוונים לפחות, לכל צרכן. דרישה זו מתבטאת בהנחה שהגרף כולל מעגלים.

3 סקר ספרות

מזה כמה עשרות שנים נעשים נסיונות להשתמש בשיטות ומודלים המבוססים על התאוריה של תכנות מתמטי ואופטימיזציה, לפתרון הבעיה של תכנון רשתות מים כך שהעלויות הכרוכות בהן תהינה מינימלית. עשרות מאמרים המציגים גישות שונות לפתרון הבעיה התפרסמו בכתבי עת מקצועיים. סקירה מיצגת, כמובן לא מלאה, התפרסמה ב-1985 במאמר של [48] Walski. התמונה העולה מראה כי קים פער גדול מאד בין מספר המודלים ותוכניות המחשב שפותחו, לבין השמוש בהן לתכנון רשתות בפועל. תמונה זו לא השתנתה כמעט עד היום. הגישה הרווחת היא שלא ניתן להציג מודל כללי של בעיית התכן ולפתור אותו כבעיית תכנות מתמטי, בזמן סביר, בשיטות אופטימיזציה קימות. לכן מתמקדות רוב השיטות הקימות בחלקים מסוימים של הבעיה. במקרים בהם מנסים לפתור את הבעיה בכל המשתנים הרלבנטיים נאלצים לפשט את הפונקציות או להזניח אספקטים מסוימים של הבעיה ובכל מקרה הבעיות הנפתרות מוגבלות מאד בגודלן עקב אורך הזמן הנדרש לפתרון.

על פי [48] Walski, בעיית האופטימיזציה של רשתות מים נתנת לסווג בדרכים שונות. חלוקות אפשרית הן:

1. פרוש זרימות קבוע מראש לעומת פרוש משתנה.

2. רשת גרויטציונית (אנרגית הזרימה מסופקת ע"י גרויטציה) לעומת רשתות הכוללות משאבות כמקור אנרגיה.

3. רשת המתוכננת לעומס יחיד לעומת מספר עומסים.

פרמטרים אחרים על פיהם ניתן לסווג רשתות הם: קיום או אי קיום מעגלים ו-או נקודות אגירה ברשת.

נסיון מענין להתאים את שיטות הפתרון לרשתות מציאותיות מוצג ב- [49] Walski. הנסיון נעשה לקראת כנס

שנערך בניו-יורק ביוני 1985 תחת הכותרת "Computers in Water Resources". הוגדרה רשת מים של עיר

היפותטית, הקרויה "Anytown U.S.A" כאשר נתונה מיצגים במדה רבה רשתות מציאותיות אפשריות. מספר

צוותים נפרדים קבלו את המשימה לתכנן את הרשת בכל דרך העומדת לרשותם והתוצאות הוצגו בכנס.

הדרישות לפתרון הבעיה כללו תכנון משאבות, מיכלי אגירה וצנרת כאשר הבסיס היה רשת "קימת" הדורשת

הרחבה לקראת תנאים עתידיים שהוגדרו. בסיכום התרגיל הוברר שכל הצוותים השתמשו בשלוב של מודלים

ממוחשבים עם חישובים דיניים ושיקולים הנדסיים ישירים. הבעיה הכוללת לא ניתנה לניסוח כמודל מתמטי יחיד

הכולל את כל המרכיבים במשולב. ההנחות השונות בהן השתמשו הצוותים לצורך גיבוש הפתרון, לא אפשרו

הכרעה בשאלה איזה מן הפתרונות עדיף. כמובן, אף אחד מהצוותים לא טען שפתרונו אופטימלי או קרוב

לאופטימלי במדה הנתנת להגדרה.

סקר מסודר של שיטות לטיפול בבעיית התכן, ערוך לפי חלוקה שונה מאלה שהוצגו לעיל, מצאנו בעבודת

הדוקטורט של אבנר קסלר (1988) [21] מתוכה נצטט תאור של מספר שיטות הנזכרות שם. בהמשך נתאר ביתר הרחבה מספר שיטות רלבנטיות במיוחד לגישת הפתרון שלנו.

קסלר מחלק את השיטות הקימות בהתאם למשתנים ההידראוליים הנפתרים, כאשר המשתנים הם:

1. פרוש העומדים הכולל את העומד בכל צומת ואת שינוי העומד על פני האלמנטים ברשת.

2. פרוש הספיקות הכולל את הזרימה לאורך כל אלמנט ברשת.

החלוקה הבסיסית של השיטות היא הבאה:

א. פתרון סימולטני של פרוש אופטימלי של עומדים וספיקות.

ב. פתרון אופטימלי של פרוש עומדים ביחס לפרוש ספיקות קבוע.

ג. פתרון אופטימלי של פרוש הספיקות ביחס לפרוש עומדים קבוע.

3.1 שיטות לפתרון סימולטני של עומדים וספיקות.

(1966) [33] Pitchai משתמש בשיטה של דגימה אקראית מתוך קבוצת קטרי צנרת מסחריים. עבור כל צרוף

של קטרים, נפתרים פרושי הספיקה והעומד בעזרת פותר רשת ומחושבת פונקציית המטרה הכוללת את מחירי

הצנרת, מחיר ההפעלה במצב עומס (צריכה) קריטי וקנסות המוטלים על חריגות של העומדים מהתחום המותר.

(1973) [50] Watanatada פותר רשת הכוללת מספר מקורות ומשאבות עבור מצב עומס יחיד. האילוצים

במודל כוללים משוואות הרציפות בצמתים. הבעיה המאולצת מוסבת לבעיה לא מאולצת באמצעות פונקציות

קנס ונפתרת בשיטת קווי-ניוטון. הקטרים נפתרים כמשתנה רציף ומוסבים לקטרים מסחריים תוך קיום

פיזיביליות (אך לא אופטימליות). השיטה יכולה להכשל ולמצוא פתרון לא אפשרי מבחינת האילוצים

ההידראוליים.

(1974) [45] Shamir פותר בעיה משולבת של תכן ותפעול עבור מספר מצבי עומס בטכניקה של GRG

(General Reduced Gradient). בכל איטרציה נפתרים האילוצים ההידראוליים עבור כל מצב עומס בנפרד עיי

שמוש בשיטת ניוטון-רפסון לפתרון מערכת המשוואות. הפתרון המתקבל משמש נקודת התחלה עבור האיטרציה

הבאה.

(1982) [14] Gessler בוחר את הקטרים עיי אנומרציה של הקטרים המסחריים הקימים ופותר רשת

גרויטציונית.

בכל שלב בודקים פיזיביליות מבחינת אילוצים הידרואוליים. חסרון בולט הוא נפח החישוב הנובע מגישה של

אנומרציה.

(1985) [9] El-Bahrawy and Smith פותרים רשת הכוללת מספר מקורות ומשאבות עבור מצב עומס יחיד.

הבעיה נפתרת כבעיית NLP כללית בעזרת MINOS. האילוצים ההידראוליים מוסבים לאילוצים ליניאריים עיי

החלפת משתנים. כפתרון ראשוני נבחר פרוש הספיקות המתאים לעץ פורס מינימלי.

החסרון העיקרי של תקיפת הבעיה בשיטות אנומרציה או שיטות של תכנות מתמטי לא ליניארי כללי הוא הזמן

הנדרש לפתרון רשתות שאינן קטנות במיוחד. בעיה נוספת הקשורה לשיטות קימות של NLP היא הצורך לעבוד

עם משתנים רציפים בלבד. ענין זה דורש פתרון טוב ברמת הניסוח של המודל. נוסף כי בעיית התכן היא לא

קמורה ונדרשת לכן התייחסות גלובלית. נסיונות לחיפוש גלובלי מלא לא מצאנו באף אחת מהשיטות המתוארות

ברשימה זו. חיפוש גלובלי מסוים נמצא בשיטת NLPG של Fujiwara המתוארת בסוף הסקר. הקשיים בתקיפה סימולטנית של משתני העומד והספיקה הביאו לגבוש שיטות הפותרות אחד מהמשתנים בהנתן השני.

3.2 פתרון פרוש הספיקות ביחס לפרוש עומדים קבוע.

את המודלים הנפתרים בשיטות המתוארות בסעיף זה מאפיינת פונקצית מטרה קעורה ופריקה (ספרבילית). במקרים שהאילוצים הם ליניאריים ניתן לפתור בקירוב עיי שיטות של תכנות ליניארי פריק כאשר פונקצית המטרה מקורבת עיי פונקציה ליניארית בקטעים.

(1969) [26] Lai and Schaake פותרים בעית הרחבה של רשת גרויטציונית קימת עבור עומס יחיד. עם פרוש עומדים קבוע, מנוסח מודל בעל פונקצית מטרה פריקה ואילוצים ליניאריים. משתנה הספיקה מוסב למשתני קוטר רציפים והמודל נפתר באמצעות פתרון של סדרת בעיות LP.

(1971) [25] Kohlhass and Mattern פותרים בגישה דומה רשת עם משאבות ומאגרים ללא הסבת משתנים. ספיקה וקטרים רציפים מוקצים לכל צינור.

(1982) [40] Rowell and Barnes קובעים את פרוש העומדים ברשת בהנחה של גרדינט הידראולי אחיד לכל צינור. המודל נפתר עיי תכנות פריק והפתרון מגדיר את פרוש הספיקות.

(1981) [36] Quindry et al. מציעים שיפור איטרטיבי של פרוש העומדים. השיפור מתבצע בכיוון הגרדינט של פונקצית המטרה ביחס לעומדים בצמתים. הגרדינט מחושב בעזרת הערכים הדואליים המתקבלים מפתרון הספיקות. הביטוי שהם מקבלים עבור הגרדינט זהה לזה שקיבלו (1977) [2] Alperovits and Shamir. לאחר שיפור העומדים בדרך זו, נפתר מחדש פרוש הספיקות וכך הלאה עד קיום קריטריון עצירה מסוים.

הקושי העיקרי עם קבוצת השיטות האחרונה נובע מהיות הבעיה מנוסחת כמודל קעור. כידוע פתרון בעית מינימיזציה קעורה עם אילוצים ליניאריים דורש אנומרציה של הפתרונות בקדקדים של הפוליהדרון המגדיר את התחום האפשרי וזה מציג בעיה רצינית של הזמן הנדרש לפתרון. השיטה האחרונה של Quindry et al., כמו גם שיטות אחרות (שתוארנה בהמשך) המנסות לפתור את הבעיה השלמה בעזרת גישה דו שלבית (דקומפוזיציה במשתנים ופתרון בנפרד באופן איטרטיבי בכל אחד מהמשתנים), לוקה בחסרון מסוג אחר. למעשה בעית האופטימיזציה החיצונית במודל כזה היא בדרך כלל לא חלקה והגרדינט הנזכר אצל Quindry et al. ואחרים בהקשר דומה, הוא לא בהכרח מוגדר בכל מקום. אפשר להראות (Zowe [52]) כי נסיון לפתור בעיה לא חלקה כזו בשיטות חלקות יכולה להכשל ו"להתכנס" לנקודות לא אופטימליות.

3.3 פתרון של פרוש העומדים יחסית לפרוש ספיקות קבוע.

את המודלים של קבוצה זו מאפיינת פונקצית מטרה קמורה ופריקה ואילוצים ליניאריים. ניתן לחלק את השיטות בסעיף זה לשיטות בהם נפתר פרוש עומדים יחיד ולשיטות בהן משופרים פרושי הספיקות והעומדים באופן איטרטיבי (בדומה לשיטת Quindry et al.).

(1973) [4] Cembrovicz and Harrington פותרים רשת גרויטציונית בעלת מקור יחיד למצב עומס יחיד. בהנחה שפרוש ספיקות אופטימלי מתאים לרשת עץ (ללא מעגלים) מוצע שם לסרוק את כל רשתות העץ האפשריות ברשת המקורית. כל עץ כניל מגדיר פרוש ספיקות יחיד עבורו פותרים את פרוש העומדים. מספר

העצים האפשריים מצומצם במדה ניכרת אם מניחים כקבוע את כווני הזרימה בכל צלע ברשת. שיטה זו מבצעת בעצם אנומרציה ומוגבלת לכן לרשתות קטנות. עם זאת הפתרון הנמצא הוא גלובלי.

Alperovits and Shamir [2] (1977) פותרים רשת עם משאבות ומאגרים עבור שני מצבי עומס אפשריים. הפתרון מתבצע באופן איטרטיבי כאשר בכל איטרציה נפתרים שני השלבים הבאים:

1. מציאת פירוש העומדים האופטימלי ביחס לפרוש ספיקות נתון.
2. שיפור פירוש הספיקות הקודם בכיוון הגרדינט של פונקצית המטרה ביחס למערך הספיקות הטבעיות (תוספת ספיקה סימולטנית אחידה לכל צינור השיך למעגל בסיסי ברשת). השיטה כוללת צעד באורך קבוע בכיוון הגרדינט.

הביטוי לגרדינט תלוי בערכים של המשתנים הדואליים בפתרון של השלב הראשון. האלגוריתם עוצר כאשר שיפור פרוש הזרימות בין שתי איטרציות עוקבות הוא קטן מערך קבוע מסוים. יתרונה של שטה זו הקרויה LPG (Linear Programming Gradient), שהפכה לשיטה המובילה ובסיס לפיתוחים נוספים בתחום פתרון בעיות תכן, הוא בנסוח מוצלח של המודל שאיפשר הצגת בעית השלב הראשון כבעיה ליניארית. דבר זה נעשה ע"י החלפת משתני העומד למשתני אורך קטעי צנרת כאשר כל קטע הוא באחד מהקטרים המסחריים הקיימים. לכל צינור במודל זה מקצים מספר קטרים מסחריים והפתרון קובע את אורכם. החלפת משתנים כזו הוצעה לראשונה ע"י - Karmeli et al. [19] (1968) עבור רשתות עץ.

ההערה שלנו ביחס לאי-חלקות של בעית השלב השני תופסת במלואה גם כאן.

Saphir [41] (1983) ו-Fujiwara et al. [11] (1987) שיפרו את שיטת LPG ע"י החלפת השמוש בשיטת הגרדינט עבור מציאת הצעד, בשיטה קווי-ניטונית. השיטה המוצעת תרמה להחשת ה"התכנסות" ושיפור הפתרון.

נעיר כאן שוב כי שני המחקרים האחרונים גם הם התעלמו מאי-החלקות של בעית השלב השני.

Fujiwara et al. [11], אכן מדעים לעובדה שבעית השלב השני אינה חלקה אך מניחים (בטעות לדעתנו) כי בגלל שאפשר להראות כי הבעיה היא חלקה כמעט בכל מקום (וזה נכון) אזי אפשר להזניח את האספקט הזה. בבעיות כאלה נמצאות נקודות המינימום (המקומיות במקרה הנדון שאיננו קמור) בדרך כלל דוקא בנקודות לא חלקות (kinks).

Kally [18] (1971) ו-Morgan and Goulter [30] (1985) נוקטים בגישה שונה. הם משפרים את פרוש העומדים בעזרת מודל ליניארי ופותר רשת כאשר שתי השיטות מבוצעות באופן איטרטיבי. בעבודות אלה מוצעות גם הרחבות למספר מצבי עומס ולהרחבת רשת קימת.

החסרון של קבוצת השיטות האחרונה לעומת הקודמת מתבטא בכך שלא ניתן בדרך כלל לקבוע מראש פרוש ספיקות טוב לעומת האפשרות לקבוע פרוש עומדים טוב (בקבוצה הקודמת) תוך שמוש בשיקולים היוריסטיים ונסיון הנדסי. היתרון העיקרי נובע מאפיון הבעיה כקמורה (עבור פרוש ספיקות קבוע).

בכל השיטות שתוארו ברשימה המוצגת, נדרשת קביעת כווני הזרימה מראש והם אינם ניתנים לשינוי במהלך הפתרון. זהו חסרון רציני לדעתנו (וגם לדעת קסלר) שכן זה מגביל מראש במדה רבה מאד את מרחב הפתרונות. השיטות היחידות הידועות עד כה (למיטב ידיעתנו) המאפשרות שינוי כווני הזרימה, הן אלה הנוקטות בגישה של אנומרציה מלאה והחסרון של גישה זו בשמוש מעשי הוא ברור.

קסלר מסים את סקירתו בציון הבעייתיות של מושג האמינות בתכנון רשתות. נושא זה הוא עדיין בחיתוליו ואין

אפילו הסכמה על הגדרת אמינות (ישנן דרכים שונות להגדיר אמינות בהקשר של רשתות מים ותפקודן). נושא זה לא מטופל במסגרת עבודה זו.

שתי עבודות נוספות שאינן נכללות ברשימה של קסלר ראויים לציון.

1. עבודת הדוקטורט של קסלר (1988) [21] שעוסקת גם היא בבעית התכן האופטימלי של רשתות חלוקה. קסלר ניסח מחדש את המודל היסודי של Alperovits and Shamir בעזרת מטריצות ותוצאות מתורת הגרפים ושיפר את תהליך הפתרון (שימוש ב- Projected Gradient בפתרון בעית השלב השני). כמו כן פיתח קסלר משוואה עבור אלמנט השאיבה ברשת המגדירה את היחס בין הספיקה לתוספת העומד כפונקציה של קוטר המאיץ, והיא מבטיחה פעולת המשאבה בנקודת עבודה עם נצילות מכסימלית. עקר הטענות שצינו נגד השיטות האחרות ובפרט אלו המישמות גישה דו-שלבית, תקפות גם עבור עבודת קסלר. בעבודה הנוכחית אנחנו משתמשים בניסוח זהה לזה של קסלר ובסעיף המתאר הרחבת המודל והכללת משאבות אנו עושים שימוש חשוב בתוצאות שלו.

2. Fujiwara and Khang [12] (1990) מציעים שיטה דו-שלבית לפתרון בעית התכן של רשת חדשה והרחבת רשת קימת המנוסחות כמודל דקומפוזיציה, בדומה (אך לא זהה), לנסוחים ב- [2] Alperovits and Shamir, [21] Kessler, [30] Morgan and Goulter ואחרים. השיטה מיצרת סדרה משפרת של נקודות אופטימליות מקומיות. בשלב הראשון של השיטה, משתני ההחלטה הם פרוש הספיקות ועומדי המשאבות והגישה היא דומה לשיטת LPG של Alperovits and Shamir (אלא שכאן הבעיה הפנימית היא לא ליניארית, מה שמקנה לשיטת Fujiwara את השם NLPG).

מטרת שלב זה היא ליצר פתרון אופטימלי מקומי. בשלב השני מחזיקים את הפסדי העומד על הצלעות ברשת כקבועים בנקודה האופטימלית המקומית שנמצאה, ופותרים את בעית המינימיזציה הקעורה במשתנים: פרוש הספיקות ועומדי השאיבה. התוצאה המתקבלת משמשת כנקודת התחלה משופרת למציאת נקודה אופטימלית מקומית חדשה. תהליך זה נמשך עד שלא מושג יותר שיפור.

השיטה המוצעת מהווה שלוב של מספר גישות שנוסו בעבר ע"י חוקרים שונים. יתרונה העיקרי הוא בכך שהיא מהווה צעד בכיוון של חיפוש פתרון גלובלי. Fujiwara עצמו מודה כי לא ניתן להוכיח שהפתרון הנמצא בסופו של התהליך הוא נקודת אופטימום גלובלי. הבקורת שלנו על שיטה זו מורכבת מהנושאים הבאים:

1. הטיפול בבעיה החיצונית בשלב הראשון של NLPG נעשה בשיטות אופטימיזציה חלקה (קווי-ניוטון) תוך התעלמות מהיותה בעיה לא חלקה.
2. בניגוד ל-LPG הבעיה הפנימית של השלב הראשון היא לא ליניארית (אמנם קמורה) ופתרונה לכן קשה יותר בדרך כלל.
3. בשלב השני פותרים בעית מינימיזציה קעורה (פונקצית מטרה קעורה ואילו צים ליניאריים). כפי שכבר הזכרנו, בעיה כזו דורשת זמן רב (תלוי במימד האילו צים) כיון שיש לסרוק את הפתרונות בקודקדי הפוליהדרון המגדיר את קבוצת הפתרונות האפשריים. עובדה זו מגבילה מאד את מימד הבעיות שיכולות להפתר בזמן סביר בשיטה זו.

4. כמו ברוב השיטות האחרות הקימות, כיוון הזרימה הוא קבוע מראש ולא ניתן לשינוי במהלך הפתרון.

5. אין חסם תחתון הנותן הערכה לטיב הפתרון המתקבל.

למרות ביקורת זו נראה כי שיטה זו (החדשה ביותר הידועה לנו בתחום הנדון) מהווה התקדמות לעומת שיטות אחרות ועל פי המדווח במאמר גם נותנת תוצאות לא רעות.

הערה:

התוצאות המספריות של פתרון בעיית Hanoi המדווחות במאמר הן שגויות. הערנו על כך ל- Fujiwara והוא הסכים אתנו לאחר בדיקה ואכן שלח תיקון במועד מאוחר יותר באותו כתב-עת. הדוגמה הנפתרת במאמר זה נפתרה גם על-ידנו בשיטה שלנו. ראה תוצאות מספריות בפרק 10 להלן.

לסכום סקר השיטות נציין כי השיטה המוצעת בעבודה זו מנסה להתמודד עם רוב החסרונות של השיטות הקימות:

מציאת פתרון גלובלי (מקורב), מציאת חסם תחתון הדוק, כיווני זרימה לא קבועים מראש ושמוש בשיטות אופטימיזציה לא חלקות במקומות בהם נפתרת בעיה לא-חלקה.

4 נסוח מודל מתימטי.

בפרק זה ננסח מודל מתימטי בסיסי לבעיית התכן האופטימלי אשר הוצגה בפרק 2. הנסוח הנוכחי איננו כולל משאבות, מאגרים ואביזרים אחרים פרט לצנרת. נתן לשלב משאבות ומאגרים במודל הבסיסי, עיי הגדרה מתאימה של משתנים מייצגים. תכנון הרשת למספר מצבי עומס צפויים בשלב התפעול, נתן גם הוא לשלב במודל זה. ההרחבות הללו תובאנה בשלב מאוחר יותר (פרק 9).

נניח בשלב זה כי הרשת מוזנת בגרויטציה ממקור אחד או יותר ואין בה תחנות שאיבה /או מאגרי עזר. הנסוח הנוכחי מתאים לרשת עם מקור יחיד. במקרה של ריבוי מקורות, הרשת מוסבת לרשת עם מקור יחיד עיי הוספת צומת מלאכותי ומספר קשתות מלאכותיות המחברות אותו אל המקורות. ברשת המורחבת המתקבלת, שוה ספיקת הכניסה אל הצומת המלאכותי, לסכום הספיקות בכל המקורות. עיי קביעת הספיקות הנכנסות לצמתי המקור מהצומת המלאכותי ומפלי העומד בין הצמת המלאכותי וצמתות המקור המקוריות, שומרים על הספיקות והעומדים המקוריים במקורות.

הנסוח הנוכחי זהה לנסוח של [21] Kessler והוא מהווה עדכון לנסוח קודם באותה גישה של [2] Alperovits & Shamir. נסוח זה מתבסס על תוצאות ידועות מתורת הגרפים ומשתמש במטריצות חילה (incidence) מכוונות של הגרף המיצג את הרשת.

הנחות:

- בשלב התכנון הבסיסי הוגדרו המקורות והצרכנים ותנאי התפעול הנדרשים.
- הטופולוגיה והטופוגרפיה ידועות.
- לצורך התכנון עומדת לרשותנו קבוצה של צנורות בקטרים וסוגים מסחריים ונתן לקבוע איזה קטרים באים בחשבון עבור כל צלע ברשת (ראה [1] Alperovits).
- אורך קטע הצנור בכל אחד מהקטרים המועמדים להרכיב צלע נתונה, הוא משתנה החלטה וייקבע בפתרון המודל.
- משקולי אמינות נקבע כי כל צרכן יוכל לקבל מים משני כוונים לפחות. דרישה זו אשר נלקחה בחשבון בשלב התכנון הבסיסי, מכתובה קיום מעגלים ברשת. נגדיר קבוצה בסיסית של מעגלים כאוסף מינימלי של מעגלים עם התכונה שכל מעגל ברשת מתקבל כקומבינציה שלהם. עבור רשת נתונה ניתן למצוא קבוצה בסיסית כניל עיי שמוש בעץ פורס כלשהו של גרף הרשת (ראה [21] Kessler).
- ניתן למצוא זרימה אפשרית (התחלתית) המקימת כלל הצומת (שמור הזרימה) ומספקת לכל צרכן את הכמות הנדרשת. פרוס הזרימה הוא משתנה החלטה וערכו האופטימלי ייקבע בפתרון המודל. נדגיש כי בגישה שלנו אין כונוי הזרימה קבועים מראש.
- מחירי הצינורות וההשקעה הנדרשת להנחת צנור בקוטר נתון בכל צלע נתונה - ידועים.
- פונקצית המטרה תתאר את עלות ההשקעה בצנרת ברשת.
- האילוצים הם משני סוגים:
 1. קיום חוקים פיזיקליים של שמור מסה (זרימה) בכל הצמתים ושמור אנרגיה הידראולית.
 2. עמידה בדרישות אספקה ועומד מינימלי (ומכסימלי אם ישנה מגבלה כזו) כנדרש בכל צמתי הצריכה.
 3. סכום אורכי הקטעים בכל צלע, שוה לאורכה (הנתון).

סמונים והגדרות:

1. ממדים

- n - מספר הצמתים.
- e - מספר הצלעות.
- l - מספר מעגלים בסיסיים.
- k - מספר מסלולים בין צמתים עם אילוץ על הפסדי עומד מותרים.
- m - מספר קטרי צנורות מסחריים אפשריים.
- s - מספר קטעי צנרת. $s = e \cdot m$

2. פרמטרים

- $h \in R^n$ - וקטור גבהים (מ') של צמתים, ביחס לנקודת ייחוס נתונה.
- $t \in R^m$ - וקטור הקטרים (אינטש).
- $u \in R^n$ - וקטור עומדים מינימליים נדרשים בצמתים (מ').
- $p \in R^k$ - וקטור הפסדי עומד מכסימליים מותרים על פני המסלולים (מ'). רכיבי וקטור זה ניתנים לחישוב בהנתן הגובה היחסי של הצמתים, העומד המינימלי הנדרש בהם והעומד במקורות.
- $d \in R^n$ - וקטור הספיקות (ביקושים) בצמתים (מיק לשעה). ($d < 0$ מקורות, $d > 0$ צרכנים).
- $a \in R^e$ - וקטור אורכי צלעות (מ').
- $c \in R^s$ - וקטור מחירים (\$) ליח' אורך צנור בקטעים. הוקטור c מאורגן באופן הבא: m הרכיבים הראשונים הם עלויות ליח' אורך של הצנורות ב- m הקטרים האפשריים עבור הצלע מס' 1, m הרכיבים הבאים הם אלו המתאימים לצלע מס' 2 וכיו.
- L - מטריצת חילה (מכוונת) $(l \times e)$ של צלעות על מעגלים בסיסיים. אפשר להראות (Kessler [21], Deo [7]), כי כל מעגל ברשת ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שורות מטריצה זו. מזה נובע כי קיום כלל המעגל של קירכהוף (הפסד העומד לאורך מסלול סגור שווה לאפס) בכל המעגלים הבסיסיים מבטיח קיומו בכל מעגל אחר ברשת. נגדיר שרירותית כוון לכל צלע וכוון לכל מעגל. כוון של צלע במעגל יקרא חיובי אם כוונהם מדהים, ושלילי אחרת.

$$(4.1) \quad L_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{if edge } j \text{ is in loop } i, \text{ positive direction} \\ -1 \quad \text{if edge } j \text{ is in loop } i, \text{ negative direction} \\ 0 \quad \text{if edge } j \text{ is not in loop } i \end{array} \right\}$$

P - מטריצת חילה (מכוונת) $(k \times e)$ של צלעות על מסלולים. אפשר להראות תוך שמוש בתוצאות מתורת הגרפים (Kessler [21]) כי אם מתקים כלל המעגל של קירכהוף בכל המעגלים הבסיסיים אזי קיום אילוץ הפסד מותר של עומד לאורך מסלול כלשהו בין שני צמתים, גורר קיומו לאורך כל מסלול אחר ברשת בין אותם הצמתים. לכן מספיק לבחור מסלול אחד בין כל שני צמתים עבורם קימת מגבלה על

הפסדי עומד מותרים. נגדיר כוון לכל מסלול באופן הבא: כראש מסלול יקבע צומת הקצה בו נדרש (או קים, אם זה מקור) עומד גבוה יותר. כוון צלע במסלול יקרא חיובי אם כוונה מזדהה עם כוון המסלול ושילי אחרת.

$$(4.2) \quad P_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if edge } j \text{ is in path } i, \text{ positive direction} \\ -1 \text{ if edge } j \text{ is in path } i, \text{ negative direction} \\ 0 \text{ if edge } j \text{ is not in path } i \end{array} \right\}$$

O - מטריצה ($e \times s$) הקובעת את סדר הקטעים על פני הצלעות.

$$(4.3) \quad O_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } (i-1) \cdot m < j \leq i \cdot m \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right\}$$

J(q) - מטריצה אלכסונית ($s \times s$). האיבר ה- i באלכסון נותן את הפסד הלחץ על פני יחי אורך של הצינור בקוטר המתאים לקטע הנמצא במקום ה- i , כאשר הזרימה בצלע המתאימה היא q_j . אברי האלכסון של J מחושבים בעזרת משוואת Hazen-Williams הנותנת את הפסד העומד בכוון הזרימה, על פני יחי אורך של צינור בקוטר t כאשר הזרימה בו היא q .

$$(4.4) \quad J(t, q) = \alpha \cdot chw^{-1.852} \cdot t^{-4.87} \cdot q^{1.852}$$

כאשר α הוא מקדם התלוי ביחידות ו- chw הוא מקדם Hazen-Williams אשר תלוי בסוג הצנור ובמידת חלקותו. האיבר ה- i באלכסון של המטריצה J נתון ע"י :

$$(4.5) \quad J_i(q) = \alpha \cdot chw_k^{-1.852} \cdot t_k^{-4.87} \cdot \text{sign}(q_j) \cdot |q_j|^{1.852}$$

for: $k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, e, \quad i = (j-1) \cdot m + k$

D - מטריצת חילה (מכוונת) ($n \times e$) של צלעות על צמתים.

$$(4.6) \quad D_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if edge } j \text{ is directed into node } i \\ -1 \text{ if edge } j \text{ is directed from node } i \\ 0 \text{ if edge } j \text{ is not adjacent to node } i \end{array} \right\}$$

Q - קבוצת הוקטורים q המקיימים חוק שמור הזרימה בצמתים.

$$(4.7) \quad Q = \{q \in R^e : Dq = \bar{d}\}$$

3. משתנים

$x \in R^e$ - וקטור אורכי הקטעים. x מאורגן באופן הבא: m הרכיבים הראשונים הם אורכי הקטעים (ב- m הקטרים האפשריים) בצלע מס' 1, m הרכיבים הבאים הם אורכי הקטעים בצלע מס' 2 וכיו. $q \in R^e$ - וקטור הזרימות. q_j הוא חיובי אם הזרימה בצלע j היא בכיוון הצלע.

מודל מתמטי

בהגדרות הנל מנוסחת בעית התכן האופטימלי של רשת חלוקת מים בצורה הבאה.

$$(4.8) \quad (P) \quad \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} f(x, q) = c^T x : \left\{ \begin{array}{ll} LOJ(q)x = 0 & (4.8) \text{ a} \\ Ox = a & (4.8) \text{ b} \\ POJ(q)x \leq p & (4.8) \text{ c} \end{array} \right.$$

המשמעות הפיסיקלית של האילוצים במודל זה היא:

a (4.8): הפסד הלחץ לאורך כל מעגל (מסלול סגור) ברשת שווה לאפס.

b (4.8): סכום אורכי הקטעים של כל הקטרים האפשריים בכל צלע ברשת, שווה לאורך הצלע.

c (4.8): הפסד הלחץ לאורך כל אחד מהמסלולים עליהם קיימת מגבלת עומד, אינו עולה על גודל נתון.

כמו-כן, כל רכיבי x הם אי שליליים והוקטורים q הם בקבוצה Q המבטיחה אספקה נדרשת בכל צומת וקיום חוק שימור הזרימה בצמתים.

תכונות:

1. המודל (P) (4.8) הוא לא קמור וגם לא חלק. אי הקמירות נמצאת באילוצים ונובעת ממכפלות בין רכיבי q

ו- x . עבור רשתות מציאותיות המודל הוא בדרך כלל בעל מימד גבוה.

2. עבור כל q נתון, מתקבלת בעיה ליניארית ב- x .

אי-החלקות נובעת מהערך המוחלט ופונקציית הסימן (sign) המופיעים באברי האלכסון של המטריצה J (4.5).

אבל אי-חלקות זו היא סליקה כלומר ניתן להחליף כל רכיב של q (רכיבי q אינם מוגבלים בסימן) בשני

משתנים אי שליליים ולקבל נסוח חלק. החלפת משתנים כזו גורמת להגדלה נכרת של מימד הבעיה.

באמצעות החלפת המשתנים הבאה ניתן לקבל נסוח חלק למודל (4.8).

עבור משתנה סקלרי x בלתי מוגבל בסימן נגדיר את המשתנים:

$$x^+, x^- \geq 0 : x^+ = \max(0, x) , x^- = -\min(0, x) \text{ then}$$

$$x^+ + x^- = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^+ + x^- = |x| \\ x^+ - x^- = x \end{cases}$$

$$\text{and } x^+ \cdot x^- = 0$$

בעזרת ההגדרה האחרונה נוכל להחליף את הבטוי הלא חלק ב (4.5) ע"י:

$$\text{sign}(q_j) \cdot |q_j|^{1.852} = \frac{(q_j^+ - q_j^-)}{q_j^+ + q_j^-} \cdot (q_j^+ + q_j^-)^{1.852} = (q_j^+ - q_j^-) \cdot (q_j^+ + q_j^-)^{0.852} \quad \forall j$$

$$.q_j^+ \cdot q_j^- = 0 \quad \forall j \text{ בנוסף יש להוסיף את האילוץ}$$

במקום לעבוד עם המודל (4.8) נעדיף לנצל את תכונה 2. נבצע הפרדת הבעיה (decomposition) במשתנים x ו- q ונסח את הבעיה מחדש ע"י המודל הבא:

$$(4.9) \quad (P1) \quad \min_{q \in Q} \varphi(q) = \min_{x \geq 0} c^T x : \begin{cases} \text{LOJ}(q)x = 0 \\ \text{O}x = a \\ \text{POJ}(q)x \leq p \end{cases}$$

הפונקציה $\varphi(q)$ מוכרת כפונקצית הערך האופטימלי. ידוע (Fiacco [10]) כי $\varphi(q)$ איננה בהכרח גזירה בכל נקודה. המודל (P1) הוא לכן מודל לא חלק. לעומת זאת מתקימות בו שתי התכונות הבאות העושות אותו אטרקטיבי לפתרון בעית האופטימיזציה הנדונה:

1. הבעיה הפנימית (ב- x) היא ליניארית עבור כל q נתון וניתנת לפתרון בכלים סטנדרטיים של תכנות ליניארי.
2. מימד הבעיה החיצונית (ב- q) הוא יחסית קטן.

בחירת המודל (P1) מחייבת כמובן שמוש בשיטה למינימיזציה של פונקציות שאינן חלקות ואינן קמורות. בשנים האחרונות פותחו מספר גישות לפתרון הבעיה וקיימים אלגוריתמים מוכנים. בפרק הבא נדון בעניין זה ביתר הרחבה.

על מנת להשלים את תאור הנסוח של המודל המתימטי המייצג את בעית התכן האופטימלי, נציג טרנספורמציה אפינית של המשתנה q המאפשרת לקבל מודל בעל מימד קטן יותר של הבעיה החיצונית ב-(P1) ובאותו זמן להפטר מהאילוץ $q \in Q$.

טרנספורמציה אפינית.

נתבונן בקבוצה $Q = \{q \in \mathbb{R}^e : Dq = d\}$. כלל $q \in Q$ ניתן להצגה יחידה כסכום של פתרון פרטי כלשהו של מערכת המשוואות הליניאריות $Dq = d$ ווקטור כלשהו $\bar{q} \in \text{null } D$. הרכיב ה- i של וקטור ב \mathbb{R}^1 ניתן לתאור כתוספת סימולטנית אחידה לכל רכיבי וקטור הזרימה q השייכים לצלעות במעגל הבסיסי ה- i . קל להוכיח כי מרחב האפס של המטריצה D נתון ע"י:

$$(4.10) \quad \bar{q} \in \text{null } D \Leftrightarrow \bar{q} = L^T \delta \text{ for some } \delta \in \mathbb{R}^1$$

כאשר L היא מטריצת החילה אשר הוגדרה לעיל ו-1 הוא מספר המעגלים הבסיסיים.
כלומר מתקיים:

$$(4.11) \quad q^0 \in Q \Rightarrow q(\delta) = q^0 + L^T \delta \in Q \quad \forall \delta \in R^1$$

מהאמור לעיל נובע השוויון:

$$(4.12) \quad Q = \{q \in R^c : Dq = d\} = Q' = \{q(\delta) \in R^c : q(\delta) = q^0 + L^T \delta \quad \forall \delta \in R^1\} \\ \Leftrightarrow q^0 \in R^c, Dq^0 = d$$

הטרנספורמציה הניל מגדירה לכל $q^0 \in Q$ התאמה חד-חד ערכית ועל מתת-קבוצה $\Delta \subseteq R^1$ לתת-קבוצה $Q_\Delta \subseteq R^c$ המושרית על ידה. ניתן לכן לנסח את (P1) מחדש כאשר המשתנה $q(\delta)$ מחליף את q . מאחר שמימד δ קטן במדה ניכרת ממימד q וכן, כפי שמראה השוויון (4.12), האילוץ $q \in Q$ מתקיים באופן אוטומטי לכל $q(\delta)$ יש יתרון גדול במעבר לבעיה המותמרת הבאה:

$$(4.13) \quad (P2) \quad \min_{\delta \in R^1} \varphi(q(\delta)) = \min_{x \geq 0} c^T x : \left\{ \begin{array}{l} \text{LOJ}(q(\delta))x = 0 \\ \text{O}x = a \\ \text{POJ}(q(\delta))x \leq p \end{array} \right\}$$

where $q(\delta) = q^0 + L^T \delta$ for some $q^0 \in Q$

המודל (P2) הוא זה אשר נפתר למעשה בעבודה זו.

הערה:

אילוץ המגביל את הערך המכסימלי של העומד בצמתים, לא הוכנס בנסוחים שהוצגו, לשם פשטות ההצגה. כמובן, ניתן להוסיף אילוץ כזה וצורתו תהיה כמו האילוץ c(4.8) עם היפוך הכיוון של אי השוויון.

הערה:

חשוב לשים לב כי במקום הקבוצה הלא חסומה Q נשתמש בפוליטופ (קבוצה לא ריקה וחסומה המוגדרת ע"י מספר סופי של חצאי מרחב סגורים ועל-מישורים) המוכל ב- Q . פוליטופ זה יבחר באופן שיכלול את הנקודה האופטימלית q^* . הדרך בה נבחר פוליטופ זה תתואר בפרק 8 להלן.

5 אופטימיזציה לא חלקה.

בעיות לא-חלקות (nonsmooth) נובעות באופן טבעי משורה של תחומים. הצורך בפתוח התאוריה הקשורה באופטימיזציה לא-חלקה ומציאת שיטות ישומיות יעילות לפתרון, הולך וגובר. נביא בזה סקירה תמציתית של חלק מהנושאים בהן מתעוררות בעיות כאלה וכמה שיטות פתרון. טפול ממצה בנושא נתן למצוא למשל ב-Lemarechal [28]. נתעכב ביתר הרחבה על השיטה בה בחרנו להשתמש באלגוריתם שלנו. הענין שלנו בנושא זה נובע מכך שבעית התכן שלנו מיוצגת ע"י מודל לא-חלק. לצורך חפוש נקודות מינימום מקומי של פונקצית המטרה $\varphi(q)$ בבעיה החיצונית ב-(P2), נדרש לנו אלגוריתם המסוגל לעבוד עם פונקציות לא-חלקות ולא קמורות.

5.1 בעיות אופטימיזציה לא חלקות

בעית מינימיזציה כללית לא-חלקה היא מהצורה:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x) \\ & \text{st:} \\ & h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \\ & Ax = b \\ & Bx \leq c \\ & bl \leq x \leq bu \end{aligned}$$

כאשר בנגוד לבעית האופטימיזציה הרגילה (החלקה), הפונקציות

$$f, \quad h_i \quad i = 1, \dots, m_e, \quad g_i \quad i = m_e + 1, \dots, m$$

אינן בהכרח גזירות ברציפות אלא רק ליפשיציאניות מקומית (locally Lipschitz). מתכונת רציפות ליפשיציאנית מקומית נובע (משפט Rademacher [6], Clarke) שהפונקציות הן גזירות כמעט בכל מקום. בפרט, דוע כי פונקציות קמורות הן בעלות התכונה של ליפשיציאניות מקומית. דוגמה טפוסית לפונקציה פשוטה הממחישה את המושג "לא-חלק" היא: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$. ל- f יש kink (נקודת אי רציפות של הגרדינט) בנקודה $x=0$. להלן דוגמאות נוספות המופיעות לעתים קרובות ביישומים:

- * l_1 - functions, i.e. $f(x) = \sum_{i \in I} |f_i(x)|$ with $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- * max - functions, i.e. $f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$ with $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$

פונקציות לא-חלקות מופיעות גם בהקשר ל- decomposition (כמו אצלנו), שחרור (relaxation) לגרנגיאני ובעיות דואליות וכן, לעתים קרובות, בבעיות אופטימיזציה של תכן הנדסי מסוגים שונים (ראה למשל Lemarechal [28]).

(Schramm and Zowe [43]). הטפול במינימיזציה של פונקציות לא-חלקות, שונה באופן מהותי מזה של

פונקציות חלקות. מאחר שהגרדינט של פונקציה לא חלקה, קיים רק כמעט בכל מקום, יש להחליף אותו לצורך פתרון בעית הכוון, בקבוצת הגרדינט המוכלל (Clarke [6]):

$$\partial f(x) := \text{conv} \left\{ \begin{array}{l} g : \text{there exists a sequence } (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ such that } x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x, \\ f \text{ differentiable at } x_i, i \in \mathbb{N}, \text{ and } \nabla f(x_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g \end{array} \right\}$$

זוהי תת-קבוצה מוגדרת היטב, לא-ריקה וקומפקטית ב- \mathbb{R}^n . אם f היא קמורה אזי הגרדינט המוכלל מתלכד עם קבוצת התת-דיפרנציאל:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

האלמנטים ב $\partial f(x)$ נקראים תת-גרדינטים של f בנקודה x . כללים לחשוב תת-גרדינטים של סכומים של פונקציות לא-חלקות, פונקציות מורכבות לא-חלקות, פונקציות מכסימום וכיו, ניתן למצוא ב- Rockafellar [37] עבור פונקציות קמורות וב- Clarke [6] עבור המקרה הכללי. למשל עבור פונקצית המכסימום נקבל:

$$\partial f(x) = \text{conv}\{\nabla f_i(x) : f_i(x) = f(x)\}$$

כללי השרשרת הרגילים המוכרים מהפונקציות הגזירות, תקפים באופן כללי רק עבור פונקציות קמורות או רגולריות במובן של Clarke [6]. הנסיון להשתמש בגזירה נומרית עבור פונקציה לא גזירה, יכול להוביל ל- "תת-גרדינט" שאיננו קשור כלל לקבוצת הגרדינט המוכלל (ראה למשל [28] Lemarechal). שיטות להתגבר על קושי זה הוצעו למשל ע"י Shor [46] ו- Studniarski [47]. תנאי הכרחי לאופטימליות במקרה הלא מאולץ בבעיות לא-חלקות הוא:

$$0 \in \partial f(x)$$

תנאי זה הוא גם מספיק עבור פונקציות קמורות. עבור בעיה מאולצת ניתן לנסח כללים דומים לכללי Karush-Kuhn-Tucker ראה [37] Rockafellar, [6] Clarke.

5.2 שיטות לפתרון בעיות לא-חלקות

בעיות לא חלקות מסוימות ניתן לחשב עבור כל x את כל קבוצת הגרדינט המוכלל $\partial f(x)$. במקרים כאלה, כמו למשל בעיות I_1 , בעיות עם פונקציות מכסימום ואחרות, נתן לנצל מבנה מיוחד של הבעיה לצורך פתוח אלגוריתם. גם במקרים כאלה, החישוב של $\partial f(x)$ במלואה דורש הרבה זמן. בדרך כלל אפשר למצוא לכל היותר אלמנט אחד $g \in \partial f(x)$. לשם פשטות נתיחס לבעיה לא מאולצת: minimize $f(x)$. נניח כי לרשותנו שגרה המחשבת בכל נקודה x , את ערך פונקצית המטרה $f(x)$ ואלמנט אחד (שרירותי) $g \in \partial f(x)$.

תחת הנחה זו עובדות השיטות הבאות:

1. שיטת cutting plane לפונקציות קמורות. (ראה [5] Cheney-Goldstein).
2. שיטות תת-גרדינט של "הקבוצה הרוסית". ראה ([34] Poljak, [46] Shor).
3. שיטת תת-גרדינטים צמודים (ראה [51] Wolfe).
4. שיטות bundle ([28] Lemarechal, [27] Bihain, [29] Mifflin, [28] Lemarechal, [23] Kiwiel).

בעבודה זו השתמשנו באלגוריתם השיך לקטגוריה האחרונה לפיכך נציג בזה את המרכיבים העקריים של שיטת bundle:

- שמירת תת-גרדינטים g_i שחושבו במהלך איטרציות קודמות בנקודות y_i בחבילה (bundle). נסמן ב- J_k את קבוצת האינדקס של תת-גרדינטים בחבילה.
- שקלול של האינפורמציה. במקרה של פונקציה קמורה f , משמשות לצורך שקלול, שגיאות הליניאריזציה:

$$\alpha(x_k, y_i) := \alpha_i^k := f(x_k) - [f(y_i) + \langle g_i, x_k - y_i \rangle] \text{ for } g_i \in \partial f(y_i)$$

- בנקודה הנוכחית x_k . שגיאות הליניאריזציה נותנות הערכה למרחק של g_i מ $\partial f(x_k)$.
- חישוב כוון החיפוש $d_k = -z_k$ כאשר z_k הוא קומבינציה קמורה של תת-גרדינטים בחבילה. ככל שהמשקל α_i^k של תת-גרדינט g_i גדול יותר, כן צריכה השפעתו על הכוון d_k להיות קטנה יותר.
- בצוע הפוש קוי בכוון d_k לשם חישוב הנקודה הבאה והעשרת האינפורמציה ע"י חישוב תת-גרדינט בנקודה זו. אפשריים שני סוגי צעדים:

(i) serious step: $x_{k+1} := y_{k+1} := x_k + td_k, t > 0$. צעד כזה מבוצע במקרה שמושגת ירידה מספקת

בערך הפונקציה בנקודה החדשה x_{k+1} .

(ii) null step: $x_{k+1} := x_k$. "צעד" כזה מבוצע אם הירידה בערך הפונקציה איננה מספקת. במקרה זה,

תת-גרדינט המחושב בנקודת המבחן $y_{k+1} := x_k + td_k, t > 0$, מעשיר את האינפורמציה בחבילת תת-גרדינטים באופן משמעותי. באלגוריתם M1FC1 של [27] Lemarechal מחושב בכל איטרציה הפתרון הגרדינטים של הבעיה הרבועית הבאה:

$$(BP) \quad \text{minimize } \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\|^2$$

s. t.

$$\lambda_i \geq 0, \quad i \in J_k$$

$$\sum_{i \in J_k} \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i \in J_k} \lambda_i \alpha_i^k \leq \varepsilon_k$$

כוון החפוש מוגדר ע"י :

$$d_k := - \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$$

ניתן להראות כי עם הפתרון האופטימלי $\lambda_i^k, i \in J_k$, הקומבינציה הקמורה

$$z_k := \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$$

הוא האלמנט בעל הנורמה הקטנה ביותר בקרוב פולייהדרלי מבפנים של $\partial_{\epsilon_k} f(x_k)$ כאשר $\partial_{\epsilon} f(x)$ היא קבוצת ϵ -subdifferential המוגדרת (עבור פונקציות קמורות) ע"י:

$$\partial_{\epsilon} f(x) := \{g : f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle - \epsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

ולכן הכוון d_k הוא קירוב לכוון ϵ_k -מורד-תלול כלומר פתרון בעית המינימיזציה של הנגזרת ה- ϵ_k -כוונית:

$$f'_{\epsilon_k}(x, d) := \inf_{t > 0} \frac{f(x + td) - f(x) + \epsilon_k}{t} = \max_{g \in \partial_{\epsilon_k} f(x)} \langle g, d \rangle$$

שיטות bundle יכולות לטפל גם בבעיות לא קמורות, אלא שבמקרה זה יש לעדכן את אופן שקלול תת-הגרדינטים בחבילה (כפי שנראה בהמשך בדיון על BT). בעבודה זו השתמשנו באלגוריתם BT Schramm [42]. שהוא שילוב של שיטת bundle עם הרעיון של trust region.

שיטות Bundle Trust

נשתמש בחבילת תת-הגרדינטים שנאספה עד האיטרציה k לבנית מדל cutting plane של $f(x)$ סביב הנקודה x_k באיטרציה k :

$$\hat{f}_k(x_k + d) := \max_{i \in J_k} \{f(y_i) + \langle g_i, x_k + d - y_i \rangle\}$$

לשם פשטות ההצגה, נניח בהמשך כי f היא קמורה. עם שגיאות הליניאריזציה:
 $\alpha(x_k, y_i) := \alpha_i^k := f(x_k) - [f(y_i) + \langle g_i, x_k - y_i \rangle]$ for $g_i \in \partial f(y_i)$ נוכל לכתוב את המודל בצורה:

$$\hat{f}_k(x_k + d) = f(x_k) + \max_{i \in J_k} \{-\alpha_i^k + \langle g_i, d \rangle\}$$

הגישה של trust region עבור חישוב הנקודה הבאה, מבוססת על מינימיזציה של \hat{f}_k על פני כדור מסביב לנקודה הנוכחית x_k , כלומר פותרים עם $\rho_k > 0$ נתון, את הבעיה:

$$\begin{aligned} \text{(TR)} \quad & \text{minimize } \hat{f}_k(x_k + d) \\ & \text{s.t:} \\ & \frac{1}{2} \|d\|^2 \leq \rho_k \end{aligned}$$

הפתרון d_k של (TR) נותן את נקודת הבדיקה הבאה $x_k + d_k$. לאחר מכן מעדכנים את ρ_k בשביל הצעד הבא. מאחר ש (TR) היא בעיה עם אילוצים רבועיים, עדיף לנסח אחרת ולקבל את הבעיה הרבועית הבאה:

$$\begin{aligned} \text{(BT)} \quad & \text{minimize } v + \frac{1}{2t_k} \|d\|^2 \\ & \text{s.t:} \\ & v \geq -\alpha_i^k + \langle g_i, d \rangle, \quad i \in J_k \end{aligned}$$

ומעדכנים את t_k במקום את ρ_k . ההצדקה לנסוח האחרון נובעת מהקשרים הבאים:

1. אם d^* הוא פתרון של (TR) ו- λ_k^* הוא כופל לגרנג'י של האילוץ הרבועי ב- (TR), אזי d^* הוא פתרון של (BT).

2. אם d^* הוא פתרון של (BT) ו- $\rho_k = \frac{1}{2} \|d^*\|^2$, אזי d^* הוא פתרון של (TR).

על מנת לקבל את הנקודה הבאה על הכוון שנמצא, מחליפים את החפוש הקוי של שיטת bundle בגישה של trust region. מבצעים איטרציה פנימית כאשר במהלכה מתאימים את t_k . הבעיה הדואלית של (BT) נתונה ע"י:

$$\begin{aligned} \text{(BTD)} \quad & \text{minimize } \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\|^2 + \frac{1}{t_k} \sum_{i \in J_k} \lambda_i \alpha_i^k \\ & \text{s.t:} \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i \in J_k \\ & \sum_{i \in J_k} \lambda_i = 1 \end{aligned}$$

מתקיימים הקשרים הבאים :

1. יהי $\lambda_i^k, i \in J_k$ פתרון של (BTD), אזי $d(t_k) := -t_k \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$ יחד עם

$v(t_k) := -t_k \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i \right\|^2 - \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k \alpha_i^k$ מהווה פתרון של (BT).

2. להפך: אם $d(t_k), v(t_k)$ הוא פתרון של (BT) עם כופלי לגרנג'י $\lambda_i^k, i \in J_k$ של האילוצים הליניאריים ב-

(BT) אזי כופלים אלו הם פתרון של (BTD).

קריטריון העצירה הוא הבא:

יהי $\varepsilon \geq 0$ ונניח כי: $\|\sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i\| \leq \varepsilon$ וכן $\sum_{i \in J_k} \lambda_i^k \alpha_i^k \leq \varepsilon$, אזי
 יהיו $f(y) \geq f(x_k) - \varepsilon \|y - x_k\| - \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$, כלומר x_k הוא בקרוב ε -אופטימלי.

מעדכנים את הקריטריונים ל- serious step ול- null step של שיטת bundle באופן הבא:

יהיו $0 < m_1 < m_2 < 1$, $0 < m_3 < 1$ ו- $(d(t_k), v(t_k))$ הפתרון של (BT) המתאים ל- t_k , יתר על כן, יהיו
 $\alpha_{k+1}^{k+1} := \alpha(x_k, x_k + d(t_k))$ ו- $g_{k+1} \in \partial f(x_k + d(t_k))$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{decrease: } f(x_k + d(t_k)) - f(x_k) < m_1 v(t_k) \\ \text{model change: } \langle g_{k+1}, d(t_k) \rangle \geq m_2 v(t_k) \end{array} \right\} \text{ serious step}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{no decrease: } f(x_k + d(t_k)) - f(x_k) \geq m_1 v(t_k) \\ \text{model change: } -a_{k+1}^{k+1} + \langle g_{k+1}, d(t_k) \rangle \geq m_2 v(t_k) \\ \text{improve information: } a_{k+1}^{k+1} \leq m_3 \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k a_i^k \end{array} \right\} \text{ null step}$$

אם לא מתקיימים התנאים לאף אחד משני סוגי הצעד, אזי יש להתאים את t_k (למשל ע"י חציתו). ניתן להראות כי אחרי מספר סופי של צעדים, מוצאים t_k מתאים, כך ש- serious step או null step מתבצע.

5.3 אלגוריתם BT - המקרה הקמור

על בסיס העקרונות שהוצגו בפרק האחרון פותח (Schramm & Zowe [43]) אלגוריתם הקרוי BT (Bundle-Trust). לשם הפעלתו היעילה דרושים מספר התקנים:

- גודל קבוצת האינדקסים J_k (מספר תת-גרדינטיים הנשמרים בזכרון), צריך לא לעבור ערך סביר כלשהו כאשר k הולך וגדל. לכן מנקים מפעם לפעם את החבילה (reset). נתוח תכונות ההתכנסות, דורש $|J_k| \geq 3$ כמו כן נדרשת איסטרטגיה מתאימה של reset.
- (BT) הוא בעיה רבועית ב- $1+n$ משתנים ו- $|J_k|$ אילוצים ליניאריים. אם $|J_k|$ קטן מהמימד n אזי ניתן לחסוך זמן חישוב ע"י החלפת (BT) בבעיה הדואלית (BTD) בה ישנם $|J_k|$ משתנים ו- $|J_k|+1$ אילוצים.
- כלל החציה הפשוט של t_k , מוחלף באיסטרטגיה היוריסטית מתאימה.

אלגוריתם BT

בחר נקודת התחלה $x_1 \in \mathbb{R}^n$ ופרמטרים: $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $0 < m_1 < m_2 < 1$, $0 < m_3 < 1$, $\varepsilon \geq 0$
 בחר חסם עליון $J_{\max} \geq 3$ ל- $|J_k|$.

- (0) Compute $f(x_1)$, $g_1 \in \partial f(x_1)$ and put $y_1 := x_1$, $J_1 = \{1\}$ and $k = 1$.
- (1) Inner iteration: Compute x_{k+1} and g_{k+1} such that the serious or null step criterion is satisfied or realize that x_k is nearly ε -optimal (in which case, stop).

- (2) If $|J_k| = J_{\max}$ then go to (3); otherwise put $J = J_k$ and go to (4).
 (3) Reset: Choose $J \subset J_k$ with $|J| \leq J_{\max} - 2$ and $\max \{i : i \in J_k, \alpha_i^k = 0\} \in J$.
 introduce some additional index k and define with $z_k := -1/t_k d_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$,

$$\sigma_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k \alpha_i^k$$

$$g_{\bar{k}} := z_k, \alpha_{\bar{k}}^k := \sigma_k, J := J \cup \{\bar{k}\}.$$

- 4) Update: If the outcome of the inner iteration is a serious step, then put
 $\alpha_i^{k+1} := \alpha_i^k + f(x_{k+1}) - f(x_k - g_i^T d_k)$ for $i \in J$, $\alpha_{k+1}^{k+1} := 0$.

$$\alpha_i^{k+1} := \alpha_i^k \text{ for } i \in J, \alpha_{k+1}^{k+1} := \alpha(x_k, y_{k+1}).$$

Put $J_{k+1} := J \cup \{k+1\}$ and go to (1).

תוצאות לגבי התכנסות:

(P) minimize $f(x)$: תבונן בבעיה הלא מאולצת:

יהי:

$$X^* := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : f(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right\}$$

אזי ישנן תוצאות ההתכנסות הבאות עבור האלגוריתם BT:

1. If $X^* \neq \emptyset$ then x_k converges to some $x^* \in X^*$ as $k \rightarrow \infty$
2. If $X^* = \emptyset$ then $f(x_k)$ converges to $\inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \in [-\infty, \infty]$
3. For piecewise linear convex functions
 $f(x) := \max \{a_j^T x - b_j : 1 \leq j \leq m\}$ with $a_j \in \mathbb{R}^n, b_j \in \mathbb{R} (1 \leq j \leq m)$

5.4 אלגוריתם BT - המקרה הלא קמור

נדון כאן בשינויים הנדרשים במקרה שהפונקציה f איננה קמורה. נניח כי f היא ליפשיציאנית מקומית (locally Lipschitz) ובנוסף היא weakly semismooth כלומר הגזרת הכונית $f'(x; d)$ שלה קיימת בכל x עבור כל d . כמו כן,

$$f'(x; d) = \lim_{t \downarrow 0} g(x + td)^T d \text{ where } g(x + td) \in \partial f(x + td)$$

עבור פונקציות לא קמורות, לא מתקיים אי-שוויון התת-גרדינט, לכן שגיאות הליניאריזציה α_i^k יכולות לקבל ערך שלילי. המודל \hat{f}_k (cutting plane) איננו יותר קירוב מלמטה של $f(x_k + \cdot) - f(x_k)$. על מנת להתמודד עם קושי זה, משתמשים באסטרטגיה הבאה (הנהוגה גם בשיטות bundle אחרות): מחליפים את α_i^k ב:

$$\beta_i^k := \beta(x_k, y_i) := \max \{ \alpha_i^k, c_0 \|x_k - y_i\|^2 \}$$

כאשר c_0 הוא גדל ממשי חיובי קטן (c_0 הוא זהותית אפס לפונקציות קמורות). על פי המבנה ברור כי $\beta_i^k \geq 0$.
נדון במודל המעודכן:

$$\hat{f}_k(d) := \max_{i \in J_k} \{ g_i^T d - \beta_i^k \}$$

β_i^k מקבל חלק מהתפקיד של α_i^k . כאשר y_i הוא "מרוחק" מהנקודה הנוכחית x_k אזי β_i^k הוא גדול לכן ל- g_i משקל קטן במודל. נחליף עתה באלגוריתם את α_i^k ב- β_i^k . זה איננו משנה את תכונותיהם הבסיסיות של (BT) ושל (BTD) אך עבור פונקציות לא קמורות f , התנאי

$$\left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i \beta_i^k \right\| \leq \varepsilon$$

אומר פשוט כי "אפס, קרוב עד כדי ε " לקמור של $g_i \in \partial f(y_i)$ מסוימים עבורם ה- y_i אינם "רחוקים מאד" מ- x_k . האיטרציה הפנימית דורשת שתי התאמות: יש לוותר על החלק השני של הקריטריון ל- *serious step* ולהוסיף את התנאי הבא לקריטריון עבור *null step*: $\langle g_{k+1}, d_k \rangle - \beta_{k+1}^k \geq m_2 v_k$. זה מבטיח שאחרי *null step*, המודל המעודכן מספק כוון d השונה במדה נכרת מהכוון הקודם הבלתי מוצלח. השינוי הזה בכוון הוא בעל תפקיד בנתוח ההתכנסות והוא מתקים אוטומטית במקרה שהפונקציה f היא קמורה ולא מושגת ירידה מספקת בערכה. על מנת שהתנאי האחרון יתקיים בדאיות, יש להוסיף במקרים מסוימים חפוש קוי. עבור המקרה הלא-קמור קיימת התוצאה הבאה:

אם f היא *weakly semi-smooth*, חסומה מלרע וסדרת האיטרציות היא חסומה, אזי קימת נקודת הצטברות \bar{x} של הסדרה $\{x_k\}$ כך ש- $0 \in \partial f(\bar{x})$.

5.5 אלגוריתם BT - עם אילוצים ליניאריים

נדון עתה בבעיה עם אילוצים ליניאריים:

$$\begin{aligned} & \text{(PC)} \quad \text{minimize } f(x) \\ & \quad \text{s.t.} \\ & \quad Ax = b \\ & \quad Bx \leq c \\ & \quad bl \leq x \leq bu \end{aligned}$$

אפשר לטפל בבעיה זו בשיטת *bundle trust* ע"י הכללת האילוצים בבעיה (BT) בכל איטרציה. אזי (BT) הופך להיות:

(BTC)

$$\text{minimize } v + \frac{1}{2t_k} \|d\|^2$$

s.t :

$$v \geq -\alpha_i^k + \langle g_i, d \rangle, \quad i \in J_k$$

$$Ad = 0$$

$$Bd \leq c - Bx_k$$

$$bl - x_k \leq d \leq bu - x_k$$

גם כאן ניתן לנסח בעיה דואלית (ראה [42] Schramm) וקימת התוצאה הבאה:
 נניח כי f קמורה ויש בידינו נקודת התחלה אפשרית. אזי האלגוריתם BT המעודכן, עם (BTC), מייצר סדרה אפשרית של נקודות. אם הקבוצה של פתרונות אופטימליים ל- (PC) איננה ריקה, אזי הסדרה מתכנסת לפתרון אופטימלי של (PC).

6 הישוב תת-גרדינט.

ראינו בפרק 5 לעיל כי על מנת להשתמש בשיטות bundle trust ובפרט באלגוריתם BT, עלינו לספק שיגרה אשר יכולה לחשב בכל נקודה את ערך פונקציית המטרה שם ואלמנט אחד (שרירותי) מקבוצת הגרדינט המוכלל. כזכור (ראה ניסוח המדל פרק 4), פונקציית המטרה בבעיה החיצונית במודל $\varphi(q)$, שייכת לקטגוריה של פונקציית הערך האופטימלי (The optimal value function). תכונות מתמטיות של פונקציית הערך האופטימלי נחקרו (ראה [10] Fiacco, [37] Rockafellar, [32] Outrata, [13] Gauvin and Dubeau) וקימות תוצאות שונות לגבי תנאים לרציפות, גזירות, קיום נגזרות כווניות וכיו. לאחרונה נבחנה ביסודיות הבעיה של הישוב תת-גרדינט עבור הערך האופטימלי מהסוג של $\varphi(q)$ במודל שלנו (ראה [8]). בפרק זה נביא את עיקרי הדברים ממאמר זה ונציג נוסחת עבודה לחישוב תת-גרדינט של $\varphi(q)$. נוסחה זו מהווה בסיס לשמוש ב-BT לצורך בצוע חיפוש מקומי במסגרת האלגוריתם הכללי לפתרון בעית התכן.

6.1 הגרדינט המוכלל של פונקציית שוליות (marginal).

הבעיה הכללית הנדונה בפרק זה היא מהצורה:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} & \inf_{\substack{q \in \mathbb{R}^n \\ x \in \mathbb{R}^m}} f(q, x) \\ & \text{s.t. :} \\ & x \in \Omega(q) \\ & q \in \omega \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, $\Omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a proper closed value multifunction, ו- ω היא תת-קבוצה לא ריקה וקומפקטית ב- \mathbb{R}^n . במקרה שלנו, תהיה Ω מהצורה:

$$\Omega(q) = \{x \in \mathbb{R}^m : \psi_i(q, x) = 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, p, \varphi_i(q, x) \leq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, s\}$$

כאשר φ_i, ψ_i הן פונקציות גזירות ברציפות. לעתים, וכך גם במקרה שלנו, יש יתרון לבצע דקומפוזיציה במשתנים ולהציג את המודל בצורה:

$$(6.2) \quad \inf_{q \in \omega} h(q) := \inf_{x \in \Omega(q)} f(q, x)$$

ולבצע את המינימיזציה בנפרד ב- x וב- q . כדוע, הבעיה החיצונית $h(q)$ איננה גזירה בדרך כלל, משום כך כדי להשתמש בשיטות שהוצגו בפרק הקודם (בפרט באלגוריתם BT), יש לדרוש ש- h תהיה לפחות ליפשיציאנית מקומית על ω .

עבור המקרה בו Ω נתונה עיי הנוסחה דלעיל, קימות תוצאות תאורטיות (ראה [38] Rockafellar, [32] Outrata, [13] Gauvin and Dubeau) אליהן נתייחס. בהמשך נעסוק במקרה הפרטי בו עבור כל $q^0 \in \mathbb{R}^n$ קבוע, הבעיה הפנימית במודל הדקומפוזיציה היא ליניארית ב- x (זהו בדיוק המודל שלנו). נסמן ב- S את קבוצת הפתרון של בעית התכנות המתמטי הבאה:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} & \inf f(q^0, x) \\ & \text{s.t. :} \\ & \psi_i(q^0, x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ & \varphi_i(q^0, x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

נסמן ב- $I(q, x)$ את הקבוצה האקטיבית, כלומר :

$$I(q, x) = \{i \in \{1, 2, \dots, s\} : \varphi_i(q, x) = 0\}$$

ונדרוש קיום התנאי הבא (H1): לכל \bar{q} בקבוצה פתוחה כלשהי V המכילה את ω וכל $\alpha \in \mathbb{R}$, קיים $\varepsilon > 0$ כך שהקבוצה

$$\left\{ (q, x) \in V \times \mathbb{R}^n : \|q - \bar{q}\| \leq \varepsilon, f(q, x) \leq \alpha, |\psi_i(q, x)| \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, p, \right. \\ \left. \varphi_i(q, x) \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

היא חסומה.

(H1) מבטיח כי h היא lower semicontinuous (l.s.c.) על V ו- $S(q)$ היא לא ריקה וקומפקטית לכל $q \in V$ עבורו $h(q) < \infty$. לכן, בגלל הקומפקטיות של ω , ל- (6.2) יש פתרון. יתר על כן, מ-(H1) נובעת רציפות ליפשיציאנית של h . תוצאה זו היא על פי [37] Rockafellar.

משפט 6.1 ([8])

ניח כי מתקיים התנאי (H1) וכמו כן, עבור כל $\bar{x} \in S(q^0)$, $q^0 \in \omega$ מתקיים תנאי כשירות אילוצים של Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) כלומר :

- (i) there exists a direction $\eta \in \mathbb{R}^m$ such that
 - $\langle \nabla_x \psi_i(q^0, \bar{x}), \eta \rangle = 0$ for $i = 1, 2, \dots, p$
 - $\langle \nabla_x \varphi_i(q^0, \bar{x}), \eta \rangle < 0$ for $i \in I(q^0, \bar{x})$
- (ii) the (partial) gradients $\nabla_x \psi_i(q^0, \bar{x})$ are linearly independent

אזי h היא locally lipschitz על ω .

1. לכל $x \in S(q^0)$ הקבוצה $K(q^0, \bar{x})$ של הכופלים המתאימים, מצטמצמת לנקודה בודדת ב- $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^s$.
 2. הקבוצה $S(q^0)$ היא singleton.
- המקרה הראשון נחקר ע"י [13] Gauvin-Dubeau אשר הוכיחו את המשפט הבא:

משפט 6.2

תהי $q^0 \in \omega$ נתונה ונניח (H2): המיפוי S הוא $uniformly\ compact$ בסביבה o של q^0 . נניח בנוסף כי לכל $\bar{x} \in S(q^0)$ יתקיים (LI): הגרדינטים החלקיים $\nabla_x \psi_i(q^0, \bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, p$ ו- $\nabla_x \varphi_i(q^0, \bar{x})$, $i \in I(q^0, \bar{x})$ הם בלתי תלויים ליניארית. אזי h היא ליפשיציאנית בסביבת q^0 , $(-h)$ היא רגולרית (במשמעות של [6] Clarke) ב- q^0 וכן:

$$(6.4) \quad \partial h(q^0) = \text{conv}\{\nabla_q \ell(q^0, \bar{x}, \mu_{\bar{x}}, \lambda_{\bar{x}}) : \bar{x} \in S(q^0)\}$$

כאשר $\mu_{\bar{x}}, \lambda_{\bar{x}}$ הם הכופלים (היחידים) המתאימים ל- (q^0, \bar{x}) וכן:

$$\ell(q, x, \eta, \lambda) = f(q, x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \psi_i(q, x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \varphi_i(q, x)$$

הוא הלגרנגיאן הסטנדרטי. המקרה השני עם אילוצי אי-שוויון, נחקר עיי [32] Outrata. התוצאה הרלבנטית ניתנת במשפט הבא:

משפט 6.3 (Outrata [32])

נניח כי מתקיים התנאי (H1) והפונקציות f , ψ_i , $i = 1, \dots, p$, φ_i , $i = 1, \dots, s$ הן גזירות פעמיים ברציפות. יהיו $q^0 \in \omega$ ו- $x^0 \in S(q^0)$ ונניח כי (MFCQ) מתקיים ב- (q^0, x^0) . נניח כמו כן כי הבעיה (6.3) מקימת תנאי אופטימליות מסדר שני ב- $x^0 \in S(q^0)$ עם כל הכופלים $(\mu, \lambda) \in K(q^0, x^0)$. אזי: $S(q^0) = \{x^0\}$, h היא ליפשיציאנית בסביבת q^0 ורגולרית ב- q^0 וכן:

$$(6.5) \quad \partial h(q^0) = \{\nabla_q \ell(q^0, x^0, \mu, \lambda) : (\mu, \lambda) \in K(q^0, x^0)\}$$

הערה: האופרטור "conv" הושמט כאן כיון שהמיפוי $(\mu, \lambda) \mapsto \nabla_q \ell(q^0, x^0, \mu, \lambda)$ הוא אפיני והקבוצה $K(q^0, x^0)$ היא קמורה.

עבור הדקומפוזיציה שלנו, נחוץ להרחיב את ההנחות של משפטים 6.2 ו- 6.3 לכל $q^0 \in \omega$. אם הבעיה הפנימית (6.3) במודל הדקומפוזיציה, היא ליניארית אזי משפט 6.3 דורש ש- $S(q^0)$ תהיה singleton (אקויולנטי לקיום תנאי אופטימליות מסדר שני). סיטואציה כזו קורית, למשל, אם אפשר לבחור בין הוקטורים $\nabla \psi_i(q^0, x^0)$, $i = 1, \dots, p$ ו- $\nabla \varphi_i(q^0, x^0)$, $i \in I(q^0, x^0)$ וקטורים בלתי תלויים ליניארית עם כופלים חיוביים λ_i . אם $S(q^0)$ איננה singleton אזי אפשר להשתמש במשפט 6.2. אבל בבעיות גדולות, מסובך לוודא שמתקיים התנאי (LI). למרבה המזל ניתן, במקרה של בעיה כמו שלנו, לנצל את המבנה המיוחד ולקבל נוסחה לחישוב תת-גרדינט גם אם ההנחות של משפטים 6.2 ו- 6.3 לא מתקיימות במלואן.

6.2 המקרה של בעית תכנות ליניארי פרמטרי.

נניח כי הבעיה הפנימית היא מהצורה:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} & \inf c^T x \\ & \text{s.t:} \\ & A_1(q)x = b_1 \\ & A_2(q)x \leq b_2 \end{aligned}$$

כאשר המיפויים $A_1 [R^n \rightarrow R^{p \times m}]$, $A_2 [R^n \rightarrow R^{s \times m}]$ הם גזירים ברציפות ו- $p < m$, $b_1 \in R^p$, $c \in R^m$, $b_2 \in R^s$ הם וקטורים נתונים. נניח גם שלכל $q \in \omega$, הפולייהדרון

$$(6.7) \quad \Omega(q) = \{x \in R^m : A_1(q)x = b_1, A_2(q)x \leq b_2\}$$

איננו ריק ו- uniformly compact ומתקיימים (MFCQ). מזה נובע שהפונקציה השולית המתאימה h , היא ליפשיציאנית מקומית על ω (ראה משפט 6.1). אם נקבע $q^0 \in \omega$ ו- $x^0 \in S(q^0)$ ויהיה x^0 קדקוד של $\Omega(q^0)$, אזי נוכל לבחור בין השורות $A_2^i(q^0)$, $i \in I(q^0, x^0)$, $A_1^i(q^0)$, $i = 1, \dots, p$, שורות בלתי תלויות ליניאריות.

נבצע בחירה מיוחדת ונקח את כל השורות $A_1^i(q^0)$, $i = 1, \dots, p$ (שהן בלתי תלויות בגלל קיום (MFCQ)) ונוסיף להן $m-p$ שורות מתאימות מתוך $A_2^i(q^0)$, $i \in I(q^0, x^0)$. נסמן ב- $J(q^0, x^0)$ את קבוצת האינדקסים שנבחרו

וב- $A_J(q^0)$ את המטריצה $[m \times m]$ של השורות שנבחרו. אם $I(q^0, x^0) = J(q^0, x^0)$ אזי מתקיים (LI) ועל פי משפט 6.2 יהיה:

$$(6.8) \quad \sum_{i=1}^p \mu_{0i} (\nabla A_1^i(q^0))^T x^0 + \sum_{i \in J(q^0, x^0)} \lambda_{0i} (\nabla A_2^i(q^0))^T x^0 \in \partial h(q^0)$$

כאשר (μ_0, λ_0) הוא הזוג (היחיד) של כופלים ב- $K(q^0, x^0)$. אם $I(q^0, x^0) \supset J(q^0, x^0)$ (proper) ואם הכופלים λ_{0i} , $i \in J(q^0, x^0)$ הם חיוביים אזי מיושם משפט 6.3 ומקבלים שוב את (6.8). נשאר המקרה בו $I(q^0, x^0) \supset J(q^0, x^0)$ (proper) והקבוצה $L(q^0, x^0) = \{i \in J(q^0, x^0) : \lambda_{0i} = 0\}$, איננה ריקה. במקרה זה, (לפרטים והוכחות ראה [8]) תקפות הנוסחה (6.8) מובטחת, אם אפשר לבצע פרטורבציה של (6.6) כך שהפתרון (עם הפרטורבציה) ישאר "קרוב" לפתרון המקורי, אי-השוויונות האקטיביים עבור $i \in I(q^0, x^0) \setminus J(q^0, x^0)$ יהפכו ללא אקטיביים והאילווצים האקטיביים למחצה (semiactive) עבור $i \in L(q^0, x^0)$ יהפכו ל- "strongly active" (כלומר הכופלים המתאימים יהפכו חיוביים). תחת ההנחות של משפט 6.2, קיימות פרטורבציות כאלה. במודל של בעית התכנ האופטימלי של רשתות חלוקה, קימים גם האילווצים $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. הבעיה המתאימה (6.6) נתנת לכתיבה בצורה הקנונית:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} & \inf c^T x \\ & \text{s.t. :} \\ & A_1(q)x = b_1 \\ & \tilde{A}_2(q)x + u = \tilde{b}_2 \\ & (x, u) \in R_+^m \times R_+^{s-m} \end{aligned}$$

כאשר המטריצה $\tilde{A}_2(q) [(s-m) \times m]$ והוקטור $\tilde{b}_2 \in R^{s-m}$ מייצגים את אי השוויונות שנשארו ו- $u \in R_+^{s-m}$.
הוא הוקטור של משתני החוסר (slack). נניח ש- (x^0, u^0) הוא פתרון של (6.9) עבור $q = q^0$ ושפתרון זה הוא קודקוד לא מנוון של הפוליהדרון של הפתרונות האפשריים. אזי ברור כי יכולים להיות לכל היותר $m-p$ אי-שוויונות אקטיביים ב- (6.6) לפיכך $\text{card}(I(q^0, x^0)) = m - p$. אבל גם אם (x^0, u^0) הוא קדקוד מנוון, עדיין ניתן להשתמש ב- (6.8) כנוסחה לחישוב תת-גרדינט אם רק אפשר למצוא בין הפתרונות של הבעיה :

$$(6.10) \quad \begin{aligned} & \sup -\langle b_1, \mu \rangle - \langle b_2, \lambda \rangle \\ & \text{s.t. :} \\ & c + A_1^T(q^0)\mu + A_2^T(q^0)\lambda \geq 0 \\ & \lambda \in R_+^s \end{aligned}$$

לפחות קדקוד אחד לא מנוון. אכן, (6.10) היא בעיה דואלית ל- (6.6) וקבוצת הפתרונות שלה היא $K(q^0, x^0)$.
העדר נוון של $(\mu^0, \lambda^0) \in K(q^0, x^0)$ פרושו שישנם לא יותר מ- $m-p+s$ רכיבים של λ^0 השווים לאפס. כך ש- $m-p$ רכיבים של λ^0 הם חיוביים. מזה נובע ש x^0 הוא הפתרון היחיד של (6.6).

6.3 חישוב תת-גרדינט בבעית התכנן.

בהסתמך על הנתוח דלעיל בפרק זה, מתקבלת התוצאה הבאה עבור פונקציית המטרה $\varphi(q)$ בבעיה החיצונית במודל (4.13):

אם x^0 הוא פתרון הבעיה הליניארית הפנימית ב- (4.13) עבור $\delta \in R^1$ כלשהו ומתקיימות ההנחות של משפט 6.2 אזי φ היא ליפשיציאנית מקומית בסביבת δ ומתקיים:

$$(6.11) \quad \begin{aligned} g := & \sum_{i=1}^1 \mu_{0i} (\nabla_{\delta}(\text{LOJ}(q^0 + L^T \delta)))^T x^0 + \\ & + \sum_{i \in I(\delta, x^0)} \lambda_{0i} (\nabla_{\delta}(\text{POJ}(q^0 + L^T \delta)))^T x^0 \in \partial \varphi(\delta) \end{aligned}$$

בדרך כלל, אין ודאות כי ההנחות של משפט 6.2 מתקיימות לכל δ שרירותי ו- $x^0 \in S(\delta)$ (ראה דוגמה ב- [8]). למרות זאת, הנסיון בעבודה זו הראה כי האלגוריתם BT עם תת-גרדינטיים מחושבים לפי (6.8), לא נכשל במציאת נקודות מינימום מקומי.

7 בסיס תאורטי

בעיית התכן האופטימלי של רשת חלוקת מים הוצגה בפרק 2 ונוסחה בפרק 4 כבעיית תכנות מתמטי לא קמורה ולא חלקה (P1) או לחילופין (P2). המטרה בפרק זה היא לפתח את העקרונות על פיהם יוגדר בהמשך אלגוריתם ישים.

שתי תכונות העושות את הבעיה קשה לפתרון בולטות לעין:

1. הבעיה איננה קמורה לכן נדרש למצוא פתרון גלובלי.

2. נדרשת הערכה לטיב הפתרון שימצא, כלומר יהיה עלינו למצוא חסם תחתון הדוק לערך פונקציית המטרה.

ממשפט הדואליות החלש (weak duality) נובע כי עקרונית, אפשר לקבל חסם תחתון מפתרון הבעיה הדואלית של המודל הפרימלי (P) (פרק 4) בהנחה שניתן לנסח במפורש ולפתור בעיה דואלית כזו. לרוע המזל, (P) היא

בעיה לא קמורה לכן אם גם תתקיים ההנחה האחרונה, החסם שנקבל מפתרון הדואלית יהיה בדרך כלל לא הדוק (פער דואליות). יתר על כן, כפי שנראה בהמשך, הבעיה הדואלית היא בעצמה בעיה קשה כיון שהיא כוללת מספר

אינסופי של אילוצים. נראה כי נתן לנצל תכונות מסוימות של המודל לפתרון אפקטיבי של הבעיה הדואלית

ולשלב פתרון זה בתהליך כולל למציאת פתרון גלובלי יחד עם חסם תחתון הדוק.

בסעיף הבא (7.1) ננסח בעיה דואלית ונראה כיצד לפתור אותה לקבלת חסם. בעיית הדוק החסם תטופל בסעיף

7.2.

7.1 בעיה דואלית ופתרונה

המודל (P) הוא מהצורה הכללית:

$$(\hat{P}_Q) \quad \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} c^T x : A(q)x \leq b$$

יהי y וקטור כופלי לגרנג'י המתאים לאילוץ ב- (\hat{P}_Q) , אזי הלגרנג'יאן הסטנדרטי יהיה:

$$(7.1) \quad \ell(x, q, y) = c^T x + y^T (A(q)x - b)$$

על פי תאוריה דואלית כללית הבעיה הבאה היא דואלית ל- (\hat{P}_Q) :

$$(\hat{D}_Q) \quad \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} \ell(x, q, y) \right\} = \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} (c + A(q)^T y)^T x - b^T y \right\} = \max_{y \geq 0} \left\{ -b^T y : c + A(q)^T y \geq 0 \forall q \in Q \right\}$$

(\hat{D}_Q) היא בעיה ליניארית עם מספר אינסופי של אילוצים ליניאריים.

בעיה זו יכולה להכתב בצורה:

$$(7.2) \quad \max_{y \geq 0} \left\{ -b^T y : \min_{q \in Q} c_j + A_j(q)^T y \geq 0 \quad \forall j \right\}$$

כאשר $A_j(q)$ היא העמודה ה- j של A .

משפט 7.1

אם לכל j , הפונקציה $\theta_j(q) = A_j(q)^T y$ היא קואזי-קעורה והקבוצה Q היא פוליטופ, אזי (\hat{D}) שקולה לבעיה ליניארית רגילה עם מספר סופי של אילוצים.

הוכחה

אם קיים מינימום לפונקציה קואזי-קעורה המוגדרת על קבוצה Q , אזי הוא מתקבל על נקודת קיצון של Q . לכן אפשר להחליף את (7.2) בביטוי שקול:

$$(7.3) \quad \max_{y \geq 0} \left\{ -b^T y : \min_{i \in I} c_j + A_j(q_i)^T y \geq 0 \quad \forall j \right\}$$

כאשר I הוא קבוצת אינדקס לנקודות קיצון ב- Q . אם Q הוא פוליטופ, אזי קבוצת נקודות הקיצון שלו היא סופית. נובע מכך שאפשר להציב בבעיה הדואלית (\hat{D}_Q) מספר סופי של אילוצים ליניאריים (המתקבלים מהצבת נקודות הקיצון) במקום מספר אינסופי המתקבל מהאוסף השלם של וקטורים ב- Q . \diamond

נתבונן עכשיו במודל שלנו (P).

נסמן: $Z_1(q) := \text{LOJ}(q)$, $Z_2 := O$, $Z_3(q) := \text{POJ}(q)$, $b_1 := 0$, $b_2 := a$, $b_3 := p$.
בסמונים אלה נכתוב את המודל (P) בצורה כללית:

$$(P) \quad \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} f(x, q) = c^T x : \left\{ \begin{array}{l} Z_1(q)x = b_1 \\ Z_2 x = b_2 \\ Z_3(q)x \leq b_3 \end{array} \right\}$$

קל לראות (נעל פי המודל הכללי (\hat{P}_Q)) כי הבעיה הבאה היא דואלית ל-(P).

$$(D) \quad \begin{aligned} & \max_{\substack{y_1, y_2 \\ y_3 \geq 0}} -(y_1^T b_1 + y_2^T b_2 + y_3^T b_3) \\ & \text{s. t.} \\ & Z_1^T(q)y_1 + Z_2^T y_2 + Z_3^T(q)y_3 + c \geq 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned}$$

ברור כי (D) תלויה בקבוצה Q. כדי להדגיש תלות זו נסמן מעתה (D_Q).

למה 7.2

יהי $m, M, t, v, a \in \mathbb{R}$. נגדיר את הפונקציה $\phi(t) := \text{sign}(t) \cdot |t|^a \cdot v$. אזי,
 $a > 0, m \leq t \leq M \Rightarrow \phi(t) \geq \min\{\phi(m), \phi(M)\}$

הוכחה

מספיק להראות כי ϕ מונוטונית. ואכן,

$$(7.4) \quad \phi(t) = \begin{cases} t^a \cdot v & \text{if } t \geq 0 \\ -|t|^a \cdot v & \text{if } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi \text{ is monotonically increasing} & \text{if } v \geq 0 \\ \phi \text{ is monotonically decreasing} & \text{if } v < 0 \end{cases} \Rightarrow \phi \text{ is monotonic}$$

◇

נתבונן עתה באילוץ הדואלי ה- k ($k = 1, 2, \dots, s$) כאשר: $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, e, k = (j-1) \cdot m + i$ כאן כרגיל m -מספר הקטרים האפשריים, e -מספר הצלעות ו- $s = e \cdot m$. נסמן ב- Z^k, L^k, P^k את העמדה ה- k של המטריצות Z, L, P בהתאמה. לפי הגדרת המטריצה Z (ראה פרק 4) האילוץ הדואלי ה- k הוא מהצורה הכללית:

$$(7.5) \quad \tau_k(q) := y^T Z^k(q) = \beta_i \cdot \text{sign}(q_j) \cdot |q_j|^a \cdot v_j + \gamma_k + c_k \geq 0$$

כאשר: β_i הוא קבוע התלוי בקוטר t_i, q_j הוא הרכיב ה- j של המשתנה q, a הוא קבוע חיובי ממש, $\gamma_k = y_2^T O^k, v_j = y_1^T L^j + y_3^T P^j$ ו- c_k הוא הרכיב ה- k של וקטור המחירים. כלומר לכל $k, \tau_k(q)$ תלויה ברכיב אחד ורק אחד של q וכל רכיבי q מיוצגים (ישנם m אילוצים התלויים ב- q_j לכל j).

לכל תת-קבוצה $Q \subset \mathbb{R}^e$, נגדיר את הקבוצה $\hat{Q}_Q \subset \mathbb{R}^e = \{\hat{q}^1, \hat{q}^2\}$ כאשר: $\hat{q}_j^1 := \min_{q \in Q} q_j, j = 1, \dots, e$,

$$\hat{q}_j^2 := \max_{q \in Q} q_j, j = 1, \dots, e$$

משפט 7.3

הבעיה הדואלית (D_Q) שקולה לבעיה ליניארית רגילה עם $2s$ אילוצים.

הוכחה

- לכל $k, \tau_k(q)$ תלויה ברכיב אחד ורק אחד (q_j כלשהו) של q (ראה (7.5)).
- על-פי למה 7.2 לכל $k, \tau_k(q)$ (האילוץ הדואלי ה- k) היא מונוטונית ב- q_j בו היא תלויה לכן היא קואזי-קעורה

ב-q.

3. הקבוצה Q היא פוליטופ (ראה הערה בסוף פרק 4).

4. מ-1. נובע שלכל k , נקודות הקיצון של המשתנה (הסקלרי) בו תלוי האילוץ ה- k הן קצוות של קטעים ולפי

הגדרה רכיבי \hat{q}^1, \hat{q}^2 כוללים את כל קצוות הקטעים הללו.

הטענה מתקבלת ממשפט 7.1, למה 7.2 ומההבחנות 1-4. הבעיה הליניארית השקולה ל- (D_Q) מתקבלת מהצבת

\hat{q}^1, \hat{q}^2 באילוץ הכללי של (D_Q) . מהצבה זו מתקבלים $2s$ אילוצים.

◇

מסקנה

ממשפט 7.3 נובע כי נתון לפתור את הבעיה הדואלית ביעילות תוך שמוש בתוכנות מסחריות של LP ולהשתמש בפתרון כחסם תחתון לערכי פונקציית המטרה הפרימלית..

כדי שנוכל להשתמש ביעילות במסקנה האחרונה לשם פתרון הבעיה הדואלית $(D_{\bar{Q}})$ עבור כל תת-קבוצה נתונה

$\bar{Q} \subset Q$, נדרשת היכולת לחשב את הקבוצה $\hat{\bar{Q}} = \{\hat{q}^1, \hat{q}^2\}$. אף כי משימה זו יכולה להיות לא פשוטה באופן

כללי (תלוי בצורה בה מוגדרת \bar{Q}), הרי שבמקרה שלנו נשתמש בתת-קבוצות שתוגדרנה כך שבכל מקרה נקבל

מידית את הקבוצה המתאימה $\hat{\bar{Q}}$. נחזור עתה לבעיה (P) מותמרת עם הטרכנספורמציה האפינית מפרק 4 כלומר

נציב במקום q את $q(\delta) = q^0 + L^T \delta$, $\delta \in R^1$. כל תת-קבוצה $\bar{Q} \subset Q$ תתקבל כ-

$\bar{Q}_\Delta = \{q(\delta) : \delta \in \Delta \subset R^1\}$ עבור קבוצה מסוימת Δ . לצורך המטרות שלנו נסתכל על קבוצות Δ המוגדרות

כתיבות בלבד כלומר כל קבוצה כזו תהיה מהצורה: $\Delta = \{\delta \in R^1 : \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \bar{\delta}_i \quad i = 1, \dots, 1\}$. עבור

המקרה הזה, קל להראות את התוצאה הבאה.

טענה 7.4

בהנתן תבה Δ , הקבוצה \hat{Q}_Δ מתקבלת בחישוב אנליטי (נוסחה).

הוכחה

תהי $\Delta = \{\delta \in R^1 : \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \bar{\delta}_i \quad i = 1, \dots, 1\}$ קבוצה נתונה. עבור $q^0 \in Q$ נתון, נגדיר את הקבוצות

$\hat{Q}_\Delta = \{\hat{q}^1, \hat{q}^2\}$, $Q_\Delta = \{q(\delta) : \delta \in \Delta\}$ כרגיל.

נגדיר את המטריצות:

$$(7.6) \quad \Delta_{i,j}^+ = \begin{cases} \bar{\delta}_i & \text{if } L_{i,j} > 0 \\ -\underline{\delta}_i & \text{if } L_{i,j} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(7.7) \quad \Delta_{i,j}^- = \begin{cases} \underline{\delta}_i & \text{if } L_{i,j} > 0 \\ -\bar{\delta}_i & \text{if } L_{i,j} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מליניאריות הטרנספורמציה על q נובע שהתרומה המכסימלית והמינימלית של כל רכיב מתקבלת בקצה המתאים של הקטע $[\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$.

עם הגדרה זו נקבל:

$$(7.8) \quad \hat{q}_j^1 = q_j^0 + \sum_{i=1}^1 \Delta_{i,j}^- \quad j = 1, \dots, e \quad \hat{q}_j^2 = q_j^0 + \sum_{i=1}^1 \Delta_{i,j}^+ \quad j = 1, \dots, e$$

◇

7.2 צמצום פער הדואליות

נתבונן במודל הפרימלי (\hat{P}_Q) ובמודל הדואלי (\hat{D}_Q) מסעיף 7.1.

$$(\hat{P}_Q) \quad \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} c^T x : A(q)x \leq b$$

$$(\hat{D}_Q) \quad \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} \ell(x, q, y) \right\} = \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{\substack{x \geq 0 \\ q \in Q}} (c + A(q)^T y)^T x - b^T y \right\} = \max_{y \geq 0} \left\{ -b^T y : c + A(q)^T y \geq 0 \quad \forall q \in Q \right\}$$

נסמן ב- $\max(\hat{D}_Q)$, $\min(\hat{P}_Q)$ את הערך האופטימלי של (\hat{D}_Q) , (\hat{P}_Q) בהתאמה.

7.5 הגדרה

פער הדואליות (duality gap) הוא ההפרש:

$$(7.9) \quad \beta = \min(\hat{P}_Q) - \max(\hat{D}_Q) \geq 0$$

אם (\hat{P}_Q) היא בעיה לא קמורה אזי בדרך כלל $\beta > 0$. בסעיף זה נראה כיצד ניתן עקרונית לצמצם את פער הדואליות, כלומר למצוא ערך B המקיים (בהנחה ש- $\beta > 0$):

$$\min(\hat{P}_Q) \geq B > \max(\hat{D}_Q)$$

יתר על כן נראה כי אפשר למצוא B קרוב שרירותית (מלמטה) ל- $\min(\hat{P}_Q)$.

נגדיר את הפונקציה:

$$(7.10) \quad d(\lambda) = \sup_{y \geq 0} \{-b^T y : A(q)^T y + c \geq 0, \forall q: \|q - q^*\| \leq \lambda, \lambda \geq 0\}$$

משפט 7.6

תהי $\{Q_i, i = 1, \dots, k\}$ חלוקה של Q . אזי:

$$(7.11) \quad \min(\hat{P}_Q) \geq \min_i \{\min(\hat{P}_{Q_i})\} \geq \max(\hat{D}_Q) \quad .1$$

.2 אם $d(\lambda)$ רציפה ב- $\lambda = 0$ אזי:

$$(7.12) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|q - q^*\| \leq \delta(\varepsilon), \forall q \in Q_i \Rightarrow \min(\hat{P}_Q) - \max(\hat{D}_{Q_i}) \leq \varepsilon$$

הוכחה

עבור 1.

$$\min(\hat{P}_Q) = \min_{i=1, \dots, k} \{\min(\hat{P}_{Q_i})\} \geq (\text{by weak duality}) \min_{i=1, \dots, k} \{\max(\hat{D}_{Q_i})\}$$

עבור אי השוויון הימני, נשים לב כי מתקיים (היות ש- $Q_i \subset Q$):

$$\forall i, \max(\hat{D}_{Q_i}) = \max_{y \geq 0} \left\{ \min_{\substack{q \in Q_i \\ x \geq 0}} \ell(x, q, y) \right\} \leq \left\{ \min_{\substack{q \in Q \\ x \geq 0}} \ell(x, q, y) \right\} = \max(\hat{D}_Q)$$

עבור 2.

עבור $\lambda = 0$ מתקיים:

$$\max(\hat{D}_{\{q^*\}}) = d(0) = \max_{y \geq 0} -b^T y : A(q^*)^T y + c \geq 0 = \min(P_{\{q^*\}}) = \min(\hat{P}_Q)$$

(פתרונות אופטימליים של בעיות ליניאריות דואליות זו לזו).

בגלל רציפות $d(\lambda)$ ב- $\lambda = 0$ (לפי הנחת המשפט) אפשר לבחור $\delta(\varepsilon)$ קטן מספיק, כך שאם:

$$Q_i \subset \{q : \|q - q^*\| \leq \delta(\varepsilon)\}$$

אזי $\max(\hat{D}_{Q_i})$ קרוב שרירותית ל- $\min(\hat{P}_Q)$.

◇

בקטע הבא נמצא באילו תנאים תהיה $d(\lambda)$ רציפה ב- $\lambda = 0$. כמוכן נראה כי תנאים אלו אכן מתקיימים

בבעית התכן.

נעיר כי (P_Q) , (D_Q) הם מקרים פרטיים של המערכת (\hat{P}_Q) , (\hat{D}_Q) לכן כל ההוכחות בסעיף זה תקפות עבורן.

רציפות $d(\lambda) = 0$.

הנחות 7.7:

1. $A_{ij}(q)$ הן פונקציות רציפות לכל i, j .

2. Q הוא פוליטופ.

3. לכל j , $A_j(q)^T y$ קואזי-קעורה ב- q .

תהינה $g_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ נתונות לכל j ע"י:

$$(7.13) \quad g_j(y, \lambda) = \sup_{q \in Q} \{ -A_j(q)^T y - c : \|q - q^*\| \leq \lambda, \lambda \geq 0 \}$$

תחת הנחות 7.7 הביטוי האחרון יכול להכתב בצורה השקולה (ראה דיון בסעיף 7.1):

$$(7.14) \quad g_j(y, \lambda) = \max_{i \in I_\lambda} \{ -A_j(q)^T y - c_j \}$$

כאשר I_λ קבוצת אינדקס (סופית) של נקודות קיצון בקבוצה $Q \cap \{q : \|q - q^*\| \leq \lambda\}$.

המרה 7.8

מפוי (מנקודה לקבוצה) $\Gamma : \Theta \rightarrow 2^*$ הוא

סגור ב- θ^0 אם לכל הסדרות:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^n \subset \Theta, \theta^n \rightarrow \theta^0 \\ x^n \in \Gamma(\theta^n), x^n \rightarrow x^0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^0 \in \Gamma(\theta^0)$$

פתוח (lsc Berge) ב- θ^0 אם:

$$\forall \text{ open set } \Omega : \Omega \cap \Gamma(\theta^0) \neq \Phi, \exists \delta(\Omega) > 0 : \Omega \cap \Gamma(\theta) \neq \Phi, \forall \theta \in N_\delta(\theta^0)$$

כאשר $N_\delta(\theta^0)$ היא סביבת δ של θ^0 .

l.s.c Hausdorff ב- θ^0 אם:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \theta \in N_\delta(\theta^0), \inf_{x \in \Gamma(\theta)} \|x - \Gamma(\theta^0)\| < \varepsilon$$

סמונים:

$$M(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}^m : g_j(y, \lambda) \leq 0, \forall j \in J = \{1, \dots, n\}\}$$

$$\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0\}$$

$$M^0(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}^m : g_j(y, \lambda) < 0, \forall j \in J\}$$

הערה

$$g_j(y, 0) = -A_j(q^*)^T y - c_j$$

$$M(0) = \{y : A(q^*)^T y + c \geq 0\}$$

$$M^0(0) = \{y : A(q^*)^T y + c > 0\}$$

בסמונים אלה נגדיר:

$$\varphi(\lambda) = -d(\lambda) = \inf_y \{b^T y : y \in M(\lambda) \cap \Gamma\}$$

מסיבות טכניות, נראה רציפות $\varphi(\lambda)$ במקום רציפות $d(\lambda)$ הנובעת ממנה כמובן. במשפטים הבאים נתיחס ל- g_j בצורתן "הסופית" כלומר בהתיחס להנחות 7.7.

למה 7.9

$g_j(\cdot, \lambda)$ היא פונקציה סגורה קמורה על \mathbb{R}^m .

הוכחה

$g_j(\cdot, \lambda)$ היא pointwise supremum של פונקציות אפיניות. ראה [37] Rockafellar.

למה 7.10

g_j פונקציה רציפה על $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

הוכחה

תהינה $y_n \in \mathbb{R}^m, \lambda_n \in \mathbb{R} \geq 0$ סדרות המקיימות: $y_n \rightarrow y, \lambda_n \rightarrow 0$. אזי:

$$\lim_{\substack{y_n \rightarrow y \\ \lambda_n \rightarrow 0}} g_j(y_n, \lambda_n) = \lim_{y_n \rightarrow y} \left\{ \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} g_j(y_n, \lambda_n) \right\} = \lim_{y_n \rightarrow y} -A_j(q^*)^T y_n - c_j = -A_j(q^*)^T y - c_j = g_j(y, 0)$$

הגבולות קימים כי g_j הן מכסימום נקודתי של מספר סופי של פונקציות אפיניות.

למה 7.11

$M(\lambda) \cap \Gamma$ היא קבוצה סגורה ב- $\lambda = 0$.

הוכחה

Γ היא קבוצה סגורה ($= R_+^m$) ו- g_j רציפה על $R^m \times \{0\}$, לכן לפי משפט 3.11 ב- [54] Bank טענת הלמה מתקיימת.

למה 7.12

אם

$$\exists y \geq 0 : A(q^*)^T y + c > 0 \quad (2)$$

אזי

$M(\lambda) \cap \Gamma$ היא l.s.c -B ב- $\lambda = 0$.

הוכחה

פרוש תנאי (2) הוא:

$$M^0 \cap \Gamma(0) \neq \emptyset \quad (3)$$

כמו כן מתקיים (לפי למות קודמות):

$$\Gamma \text{ היא קמורה,} \quad (4)$$

$$g_j \text{ הן רציפות על } R^m \times \{0\} \quad (5)$$

$$g_j(\bullet, 0) \text{ קמורות על } R^m. \quad (6)$$

לפי משפט 3.16 ב- [54] Bank התנאים (3)-(6) מספיקים להבטחת קיום הטענה.

משפט 7.13

אם מתקיים תנאי (2) (שהוא מעין "Slater" condition), אזי $\varphi(\lambda)$ רציפה ב- $\lambda = 0$.

הוכחה

$$\varphi(\lambda) = \left\{ \inf_y f(y) : y \in \overline{M}(\lambda) \right\}$$

כאשר

$$\bar{M}(\lambda) = M(\lambda) \cap \Gamma, \quad f(y) = b^T y$$

מתקיים:

$$\bar{M} \text{ היא } l.s.c - B \text{ ב- } \lambda = 0, \quad (7)$$

$$\text{פונקצית המטרה } f(y) \text{ היא רציפה וקמורה,} \quad (8)$$

$$M(0) \text{ היא קבוצה סגורה קמורה (למעשה, פוליהדרלית),} \quad (9)$$

$$\bar{M}(\lambda) \text{ היא קבוצה קמורה לכל } \lambda \geq 0 \text{ (זב נובע מקמירות } g_j(\cdot, 0) \text{ לכל } \lambda \geq 0), \quad (10)$$

$$\bar{M} \text{ היא סגורה ב- } \lambda = 0. \quad (11)$$

לפי משפט 4.3.3 ב- Bank [54] התנאים (7)-(11) מספיקים לקיום הטענה.

◇

מרציפות $\varphi(\lambda)$ ב- $\lambda = 0$ נובע כי $d(\lambda) = -\varphi(\lambda)$ היא (בתנאים האמורים) רציפה ב- $\lambda = 0$.

במודל שלנו (D_Q) מתקיימות ההנחות 7.7, כמו כן תנאי ("Slater") (2) מתקיים עם $y=0$ כי

$$c_j > 0, \quad \forall j.$$

מסקנות:

הראינו שנתן עקרונית לצמצם את פער הדואליות עיי העדנה מתאימה של חלוקה של Q . יתר על כן למעשה ניתן לן לסגור את הפער עד כל $\varepsilon > 0$.

יישום רעיון זה, ידרוש לפתור את הבעיה הדואלית מספר גדול של פעמים. בסעיף 7.1 הראינו שהבעיה הדואלית

ניתנת לפתרון יעיל באמצעות תוכנה של LP.

בפרק הבא נראה יישום העקרונות שפותחו כאן באלגוריתם כולל הפותר גלובלית את בעית התכן.

8 אלגוריתם לפתרון גלובלי של הבעיה.

על בסיס התוצאות התאורטיות של פרק 7, נפתח בפרק זה אלגוריתם לפתרון בעיית התכן בניסוחה המצומצם, כלומר עבור רשת ללא משאבות ומאגרים ועומס יחיד. בפרק הבא, נבצע הרחבות לרשתות מורכבות יותר המכילות אלמנטים נוספים.

הכלי אותו אנו עומדים לפתח צריך לעמוד בדרישות הבאות:

1. לקבל קלט מוגדר היטב הכולל נתוני הרשת, דרישות לתכנון (אילווצים), פתרון אפשרי התחלתי ומספר פרמטרים המבקרים את תהליך הפתרון כגון: קריטריון עצירה, רמת דיוק, בחירת איסטרטגיה, מגבלות משאבים (זמן ריצה), רמת הפרוט של הפלט שיוצג ואחרים.
2. למצוא באופן אמין ובזמן סביר (בהתאם למגבלות) פתרון גלובלי וחסם הדוק הנותן הערכה לטיב הפתרון, או (אם לא ניתן) לעצור עם הודעת כשלון הכוללת מספיק אינפורמציה לצורך ריצות נוספות.
3. להציג בצורה ברורה פלט הכולל את תוצאות הריצה ואינפורמציה אחרת רלבנטית ברמת פרוט מוגדרת.

לשם תאור האלגוריתם ומרכיביו נזדקק למספר סימונים ושגרות.

סימונים:

$f \min^*$	-- הערך האופטימלי הגלובלי של (P2).
fmin	-- הערך הטוב ביותר שנמצא עבור פונקציית המטרה הפרימלית.
$fmin^k$	-- הערך הטוב ביותר שנמצא עבור פונקציית המטרה הפרימלית אחרי חפוש מקומי k.
B	-- חסם תחתון גלובלי ל- $f \min^*$.
B^n	-- חסם תחתון גלובלי אחרי איטרציה חיצונית n.
ε	-- הדיוק הנדרש באחוזים. $\varepsilon = (f \min^* - B) \cdot 100 / f \min^*$.
ε_0	-- הדיוק המבוקש באחוזים באיטרציה חיצונית ראשונה.
ε^n	-- הדיוק המבוקש באחוזים באיטרציה חיצונית n.
$\bar{\varepsilon}^n$	-- הדיוק שהושג באחוזים אחרי איטרציה חיצונית n. $\bar{\varepsilon}^n = (f \min^k - B^n) \cdot 100 / f \min^k$.
gap ⁿ	-- הפער המותר בין ערך הפתרון לחסם באיטרציה חיצונית n. משמש כקריטריון בין מצב "סעף" למצב
	"חסום".
l	-- רמת הסעף בעץ החלוקות.
k	-- מונה למספר החפשים המקומיים.
m	-- מספר החלקים בחלוקה סטנדרטית של התיבה הנוכחית.
Δ^l	-- התיבה הנוכחית ברמת סעף l.
g_Δ	-- ערך הפתרון האופטימלי של הבעיה $(D)_\Delta$.
Δ_i	-- החלק ה- i בחלוקה של Δ .
\bar{i}	-- האינדקס של תת-הקבוצה ב- Δ^l עבורה התקבל הערך האופטימלי הדואלי הנמוך ביותר.
	$\bar{i} = \arg \min_i g_{\Delta_i} : \Delta_i \text{ is a part in a partition of } \Delta^l$
n	-- מונה לאיטרציות חיצוניות. איטרציה חיצונית היא חזרה על תהליך הפתרון עם עדכון של הדיוק

	הנדרש והקבוצה Δ_0 .
nmax	-- מספר מכסימלי של איטרציות חיצוניות.
c	-- אורך הענף הנוכחי בעץ החלוקות. משמש לבדיקת קריטריון לבצוע חפוש מקומי.
cmax	-- פרמטר המשמש בקריטריון להחלטה על חפוש מקומי.
tmax	-- מגבלת הזמן לריצה.
α	-- מספר בין אפס לאחד. $100 \cdot \alpha$ הוא האחוז הנלקח מהשינוי המקסימלי של q הנקבע לפי שטת החישוב של Δ_0 .
τ_1	-- מספר בין אפס לאחד. מקדם הקטנה ל- ε^n בכל איטרציה חיצונית נוספת.
τ_2	-- מספר בין אפס לאחד. מקדם הקטנה ל- α בכל איטרציה חיצונית נוספת.

שגרות:

DEL(q^0, α)	-- מציאת Δ_0 עבור q^0 נתון כאשר לוקחים $100 \cdot \alpha$ אחוזים מתחום השינוי המלא הנקבע מצורת החישוב של Δ_0 .
LOC(δ)	-- חפוש מקומי עם δ כנקודת התחלה.
PART(Δ)	-- חלוקה של התיבה הנוכחית Δ ל- m תיבות. השגרה כוללת מציאת הצלע הגדולה ביותר של Δ וקבלת m תיבות ע"י חלוקת צלע זו ל- m חלקים שווים.
DUAL(Δ)	-- פתרון הבעיה הדואלית $(D)_{\Delta_i}$ לכל חלקי Δ בחלוקה הנוכחית.
MIN(Δ)	-- מציאת \bar{i} והערך \bar{g}_{Δ_i} .
CHANGQ(δ)	-- שגרה המחליפה את q^0 ב- $q(\delta)$.

הנושאים שידונו הם הבאים:

1. קלט. -- צמצום מרחב הפתרונות Q לתיבה Q_0 של פתרונות רלבנטיים. -- וקטור התחלתי של זרימה q^0 .
2. חיפוש גלובלי. -- תהליך סעיף וחסום (branch and bound). -- עצירה.
3. חיפוש מקומי. -- קריטריון לאתור נקודות התחלה.
4. שפור דיוק. -- איסטרטגיה.
5. פלט. -- תכולה.
6. אלגוריתם. -- תאור, תכונות ומגבלות.

8.1 קלט.

8.1.1 צמצום מרחב הפתרונות Q לתבה Q_0 של פתרונות רלבנטיים.

המודל המתמטי של בעיית התכן כולל את האילוץ $q \in Q$ כאשר $Q = \{q \in R^e : Dq = d\}$ היא קבוצת וקטורי הזרימה המקימים את דרישות המים בצמתים ואת חוק שימור הזרימה. מאחר שעלינו למצוא פתרון

גלובלי, ובפרט מסבות הקשורות לדרך מציאת חסם תחתון הדוק, ישנה חשיבות מעשית להחליף את הקבוצה הבלתי חסומה Q בקבוצה חסומה \bar{Q} קטנה ככל האפשר, כך שיתקיים בדאות $q^* \in \bar{Q}$ כאשר q^* הוא הוקטור האופטימלי. מסבות שתתבררנה בהמשך נבחר את \bar{Q} להיות תיבה כלומר נחפש את הקבוצה

$$(8.1) \quad \bar{Q} = \left\{ q \in R^e : \underline{q}_j \leq q_j \leq \bar{q}_j, j = 1, \dots, e \right\}$$

הקטנה ביותר הכוללת בתוכה את q^* שהוא כמובן איננו ידוע. לא קימת דרך אנליטית לבחור תבה כזו אך מאחר שלצמצום המרחב המבוקש ישנה חשיבות מעשית מכרעת לא ניתן לותר על כך. נשתמש בגישה היוריסטית הנסמכת על נסיון הנדסי ועל תוצאות של הפעלת השטה על בעיות דוגמה. הדגש הוא על מציאת התיבה הקטנה ביותר שכן, כמובן, ניתן תמיד לקחת תבה "גדולה מאד" כך שבדאות לא נאבד את הנקודה האופטימלית.

למעשה נפתור את הבעיה המותמרת (P2) לכן נמצא את התיבה המתאימה $\Delta_0 \subset R^1$ המשרה את \bar{Q} באמצעות הטרנספורמציה $\bar{Q}_{\Delta_0} = \{q(\delta) = q^0 + L^T \delta, \delta \in \Delta_0\}$ (ראה פרק 4). מסתבר שמציאת Δ_0 היא קלה לבצוע. אנו מניחים כאן כי וקטור אפשרי התחלתי q^0 נתון (בסעיף הבא נטפל בבחירתו). יהי $\delta^* \in R^1 : q^* = q(\delta^*)$ מבוקשת אם כן התיבה הקטנה ביותר מהצורה:

$$(8.2) \quad \Delta_0 = \left\{ \delta \in R^1 : \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \bar{\delta}_i, i = 1, \dots, l, \delta^* \in \Delta_0 \right\}$$

נוכר כי המשמעות הפיזיקלית של δ_i היא תוספת סימולטנית לכל רכיבי הזרימה q השיכים למעגל בסיסי i ברשת. מכאן הרעיון הבא: עבור q^0 נתון, בחר את הגבולות לרכיב δ_i של δ כך שעם התוספת $\underline{\delta}_i$ יתאפס הרכיב הגדול ביותר של q^0 המשתתף במעגל ה- i בכיוון החיובי של המעגל ועם התוספת $\bar{\delta}_i$ יתאפס הרכיב הגדול ביותר של q^0 המשתתף במעגל ה- i בכיוון השלילי של המעגל. שאר רכיבי הזרימה בכוונים המתאימים יהפכו כמובן את כוניהם אחרי התוספות הגבוליות.

הערות:

1. שים לב כי דרך החישוב המוצעת נעשית באופן בלתי תלוי לכל מעגל (לכל רכיב של δ) בנפרד כלומר מתעלמת מההשפעות ההדדיות של התוספות על רכיבים המשתתפים ביותר ממעגל אחד. הסבה היא פשטות החישוב וההנמקה היא שקביעת הגבולות בדרך זו מאפשרת תחום שינויים (יחסי) גדול מאד לכל רכיבי q^0 . נראה (והנסיון עם בעיות דוגמה שנפתרו במסגרת עבודה זו מאשר זאת) כי אפילו כך, התיבה המתקבלת היא גדולה מדי ובעצם ניתן בבטחון להסתפק בתבה קטנה יותר.

2. ברור ש Δ_0 הנקבעת בדרך המוצעת תלויה ב- q^0 . ההנחה היא ש- q^0 הנבחר הוא "סביר" (נחזור לענין זה בסעיף הבא) ועבור q^0 סביר השינויים שמאפשרת Δ_0 הם לפחות מספיקים, כלומר ההסתברות ש- $\delta^* \in \Delta_0$ היא זניחה.

3. בכל מקרה, כפי שנראה בסעיף העוסק באיסטרטגיה, ניתן לבחור Δ_0 גדול יותר בהתחלה ולעדכנו (להקטינו) באופן איטרטיבי בהמשך. ענין זה הוא בעל השפעה ניכרת על משך הריצה ועוד נשוב לכך.

4. כאמור, לא ניתן להוכיח את "נכונות" השיטה לקביעת Δ_0 . יתכן כי אפשר למצוא שיטה טובה יותר. אם משקולים שונים, מתמטיים או הנדסיים, ניתן למצוא תיבה קטנה יותר ובטוחה מספיק אזי צפוי שפור ביעילות הבצוע של האלגוריתם.

8.1.2 וקטור זרימה התחלתי q^0

עקרונית כל וקטור $q \in Q$ מתאים לשמש בתפקיד q^0 . הבעיה היא למצוא וקטור כזה עבור רשת נתונה כלשהי. בהעדר כל אינפורמציה נוספת ניתן בקלות, תוך ידיעת הספיקות במקורות, למצוא וקטור q המקיים את התנאים הנדרשים. קימות תוכנות הקרויות "פותרי רשת" המיצרות וקטור מתאים עבור כל רשת עם פרוס עומדים נתון (ראה

[3] Boulos and Wood ו-[17] Howard). וקטור טוב יותר ניתן לקבל, אולי, תוך הסתייעות בנסיון ושיקולים הנדסיים. אם הבעיה טופלה כבר בשיטות אחרות קימות, ניתן לבחור בתור q^0 את התוצאה הטובה ביותר הקימת. האלגוריתם שיוצג איננו רגיש בעקרון לטיב q^0 (פרט להשפעתו על קביעת Δ_0). רצוי (אך לא הכרחי) שהוא יהיה אפשרי בבעיה הפנימית של (P2) (והוא כזה אם הוא נמצא עיי פותר רשת למשל). גם אם איננו אפשרי ומקיים רק $q^0 \in Q$ עדיין ניתן להשתמש בו והאלגוריתם ימצא בעצמו בהמשך וקטור אפשרי. בכל מקרה נסכם כי מעשית הבעיה של מציאת וקטור זרימה התחלתי היא פתורה.

8.1.3 פרמטר הדיוק ε

נגדיר את דיוק הפתרון המתקבל עיי הגודל $\bar{\varepsilon} = (\bar{f} - B) \cdot 100 / \bar{f}$ כאשר \bar{f} הוא הערך הטוב ביותר (הנמוך ביותר) שהתקבל ו-B הוא החסם התחתון שנמצא. $\bar{\varepsilon}$ מתאר את המרחק היחסי (באחוזים) בין שני הערכים הניל ומשמעותו היא כי לא ניתן לשפר את ערך הפתרון ביותר מ- $\bar{\varepsilon}$ אחוזים. הדיוק באלגוריתם שלנו הוא גודל הנקבע מראש עיי המתכנן כלומר הוא פרמטר קלט. מאחר שיש מחיר בזמן מחשב לרמת דיוק הפתרון ומראש לא ברור כמה זמן יקח לפתור בעיה נתונה עד רמת דיוק כלשהי, יש לענות על השאלה כיצד נבחר ערך פרמטר הדיוק. מובן כי המתכנן רוצה לקבל את הדיוק הטוב ביותר במסגרת מגבלות הזמן והתקציב שלו. הדיוק שנתן להשיגו בזמן סביר תלוי בממדי הבעיה ובכוונן פרמטרים של בקרה המשפיעים על יעילות הבצוע בתנאים נתונים. כוונן טוב דורש נסיון בעבודה עם האלגוריתם. בשלב זה נאמר כי השיטה מתוכננת כך שהמתכנן יכול לקבוע דיוק סופי מבוקש דיוק מינימלי התחלתי. האלגוריתם מבצע איטרציות פתרון כאשר בכל איטרציה מתקבל דיוק גבוה יותר. התוצאה שתתקבל תהיה ברמת הדיוק הגבוהה ביותר הנתנת להשגה במסגרת המגבלות (המוגדרות עיי פרמטרים מתאימים בקלט). על הפרטים נדון בסעיף איסטרטגיה (להלן בפרק זה).

8.2 חפוש גלובלי

8.2.1 תהליך סעיף וחסום (branch and bound)

מהתוצאות התאורטיות של פרק 7 עולה כי נתן לצמצם את פער הדואליות הקים בין הפתרון האופטימלי הגלובלי של (P2) לבין הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית עבור כל קבוצה Δ במרחב המשתנה δ . צמצום הפער נתן להשגה עיי העדנה מתאימה של חלוקות של Δ . תוצאה תאורטית זו משמשת לנו בסיס לאלגוריתם מטפוס "סעיף וחסום" המבצע את המטלות הבאות:

1. חפוש גלובלי - אתור אזורים עם ערכים נמוכים של פונקציית המטרה.
 2. שפור ערך פונקציית המטרה עיי סדרת חפושים מקומיים.
 3. מציאת פתרון גלובלי וחסם תחתון הדוק כך שהפער היחסי ביניהם אינו עולה על ערך הנקבע מראש.
 4. אם הדיוק הנדרש אינו נתן להשגה במסגרת מגבלות זמן נתונות אזי בכל מקרה מקבלים פתרון וחסם הדוק עד כמה שנתן.
- התהליך המוצע מבוסס על סדרת העדנות מקומיות (branch) והמנעות מחפוש במקומות בהם, באופן מוכח, לא קיים פתרון שערכו נמוך מרמה הנקבעת עיי הדיוק המבוקש (bound).

לפני הצגת האלגוריתם השלם, נתאר את הרעיון הבסיסי של סעיף וחסום המהווה את התהליך המרכזי בו. יהיו: Δ^l התיבה הנוכחית ברמת סעיף k, l הערך הטוב ביותר שנמצא לאחר חפוש מקומי k , gap^n המרווח המכסימלי המותר באיטרציה חיצונית n .
התהליך הבסיסי של "סעיף וחסום" מתואר בסדרת הצעדים הבאה:

- (8.3)
1. $PART(\Delta^l) \rightarrow \Delta_i, i = 1, \dots, m$
 $DUAL(\Delta^l) \rightarrow g_{\Delta_i}, i = 1, \dots, m$
 $MIN(\Delta^l) \rightarrow \bar{i}, g_{\Delta_{\bar{i}}}$
 $(g_{\Delta_{\bar{i}}}$ is a (local) lower bound on $\Delta^l)$
 2. (check branch or bound) if $(fmin^k - g_{\Delta_{\bar{i}}}^1 \leq gap^n)$ then goto 3.
 else
 goto 4.
 3. (bound) $g_{\Delta_{\bar{i}}}^{l-1} \leftarrow g_{\Delta_{\bar{i}}}^1, l \leftarrow l - 1, MIN(\Delta^l)$ goto 2.
 4. (branch) $l \leftarrow l + 1, \Delta^l \leftarrow \Delta_{\bar{i}},$ goto 1.

הערות:

החלק בו מתבצע בפועל שפור החסם הוא בצעד 3. $g_{\Delta_{\bar{i}}}^{l-1} \leftarrow g_{\Delta_{\bar{i}}}^1$. אם האלגוריתם נמצא במצב של bound אזי בהכרח מתקיים: $g_{\Delta_{\bar{i}}}^{l-1} < g_{\Delta_{\bar{i}}}^1$. הדיון התאורטי בפרק 7. מבטיח כי כל ענף חייב להגיע למצב bound אחרי מספר מספיק של שלבי branch. ברור כי כל שלב של branch הוא העדנה מקומית של החלוקה.

8.2.2 עזירה.

עיון בצעדים שהוצגו לעיל מבהיר גם את מצב העזירה של האלגוריתם. אם הגענו חזרה ל- $l = 0$ ומתקיים מצב bound אזי $B = g_{\Delta_{\bar{i}}}^1$ הוא חסם תחתון (גלובלי) הדוק. במצב זה מתקיים:
 $fmin = fmin^k, fmin - B \leq gap^n, n = 1, 2, \dots$ הדרך המדויקת בא נקבע gap^n , תתואר להלן בסעיף העוסק בשפור דיוק הפתרון.

8.3 קריטריון לאתור נקודות התחלה עבור חפוש מקומי.

אחת השאלות החשובות הקשורות בבצוע יעיל של האלגוריתם היא, איך לשפר את ערך פונקציית המטרה הפרימלית. המטרה היא ליצר סדרה יורדת של ערכי הפונקציה כך שבסופה ימצא ערך הקרוב עד כדי gap לערך האופטימלי הגלובלי. התשובה (לא בהכרח הטובה ביותר האפשרית) נמצאת בקריטריון סעיף או חסום שהוצג בסעיף הקודם. אם ב- Δ^1 לא מצויות נקודות שערך הפונקציה בהן נמוך מ- $gap - f_{min}^k$ אזי אחרי העדנה מספקת של החלוקה של Δ^1 , חייב להתקים הקריטריון ל- $bound$. מאידך, אם קימות נקודות "טובות" כנ"ל, אזי נוכל להמשיך ולעדן את החלוקה ובכל שלב נמצא במצב $branch$, כלומר הענף הנוכחי ילך ויתארך. נובע מזה שאפשר להשתמש באורך הענף הנוכחי (מספר שלבי $branch$) כקריטריון המבוקש. נקבע פרמטר c_{max} וניתן לו ערך גבוה מספיק (למשל 10). במהלך האלגוריתם נציב מונה c למספר שלבי $branch$ שבוצעו אחרי שלב ה- $bound$ האחרון. הקריטריון לביצוע חפוש מקומי יהיה הבא: אם $c > c_{max}$ אזי בחר $\delta \in \Delta^1$ ובצע $LOC(\delta)$ כלומר חפוש מקומי עם δ כנקודת התחלה. מאחר שבשלב בו מתקים הקריטריון, Δ^1 היא כבר קטנה למדי ובהעדר כל אינדיקציה איך לבחור את δ , הנהגנו את הכלל של בחירת מרכז התבה Δ^1 . בחירה אחרת, הנותנת לפעמים תוצאות טובות יותר היא אחד מקודקודי התיבה הנוכחית. אף כי לא נתן לומר שבכל מקרה מושג שיפור (שכנהחפוש הוא מקומי ויתכן כי קים בסביבה מינימום מקומי שאינו משופר) הרי שבדרך כלל הוכיח הקריטריון הזה את יעילותו. הערך של c_{max} משפיע על פרופורציה הזמן שהאלגוריתם מבלה בחפוש מקומי. ערך "אופטימלי" של c_{max} המביא ליעילות גבוהה תלוי בממדי הבעיה והמבנה הספציפי ונדרש נסיון מסוים כדי לקבוע אותו היטב עבור בעיה נתונה.

מאחר שבשלב של חפוש מקומי אנחנו פותרים את הבעיה (P2) (כזכור, זוהי בעיה לא קמורה ולא חלקה), אפשר להשתמש לצורך חיפוש מקומי בכל אלגוריתם המבצע מינימיזציה של פונקציה לא קמורה ולא חלקה. אנחנו משתמשים באלגוריתם BT שהוצג בפרק 5 כאשר תת-גרדינט הנדרש בכל איטרציה של BT מחושב לפי הנוסחה שהתקבלה בפרק 6, תוך שמוש בפתרונות פרימלי ודואלי של הבעיה הפנימית (הליניארית) במודל (P2).

8.4 שפור הדיוק - איסטרטגיה.

האלגוריתם שלנו הוא, כאמור, מטפוס של "סעיף וחסום". באלגוריתמים כאלה יש בדרך כלל קשר אכספוננציאלי בין זמן החישוב ומימד הבעיה. הזמן העיקרי בפתרון הבעיה בשיטה שלנו, מושקע בפתרון הבעיות הדואליות בתיבות המתקבלות בתהליך ההעדנה של החלוקות. אם דרוש להגיע לרמת סעיף l על מנת שנקבל העדנה מספקת לצורך אפקטיביות הקריטריון של סעיף או חסום, ומספר החלקים בכל חלוקה הוא m אזי המספר הפוטנציאלי של תבות בהן יש לפתור את הבעיה הדואלית הוא בסדר גודל של m^l . אף כי האלגוריתם שלנו הוכיח את עצמו כיעיל למדי בבעיות אותן פתרנו, ומספר הפעמים בפועל של פתרון הבעיה הדואלית הוא קטן מאד יחסית למספר הנ"ל, בכל זאת יש קשר הדוק בין זמן הפתרון ורמת הסעיף המכסימלית הנדרשת. הגדלים המשפיעים על הזמן הם הבאים:

1. גודל התבה המכסימלית Δ_0 .

2. מימד הוקטורים δ (זהו כזכור מספר המעגלים הבסיסיים ברשת).

3. הדיוק הנדרש ε .

הנסיון מראה כי בעוד שבבעיות קטנות ניתן לפתור לרמת דיוק גבוהה (למשל $\varepsilon = 0.5\%$) במהלך אחד ובזמן

קצר, הרי שבבעיות גדולות נדרש זמן רב על מנת להגיע לרמת דיוק כזו ובמקרים מסוימים לא ניתן לסיים בזמן סביר. יתר על כן, אם הדיוק הנדרש הוא גבוה וקימת מגבלה על זמן מחשב אזי קימת האפשרות שהזמן יגמר לפני שיהיה בידינו חסם גלובלי כלשהו (נזכיר כי החסם הגלובלי נקבע, עבור דיוק נדרש כלשהו, רק עם עצירת האלגוריתם. כל החסמים האחרים המחושבים במהלך הריצה הם מקומיים). המטרה שהצגנו לעצמנו היתה מציאת איסטרטגיה שתאפשר לקבל את התוצאה הטובה ביותר האפשרית במגבלת הזמן הנתונה. הדגש הוא על כך שבכל מקרה תהיה בסוף הריצה תוצאה, כלומר פתרון טוב וחסם הדוק במדת האפשר. על מנת להתגבר על הקשיים האלה ננקטת האיסטרטגיה שתואר להלן. איסטרטגיה זו מבוססת על ההנחה (ההיוריסטית) הבאה: ככל שהפתרון שבידינו טוב יותר, כלומר ערכו קרוב יותר לערך האופטימלי הגלובלי של הבעיה, כך קטן יותר תחום השנוי הרלבנטי של רכיבי וקטור הזרימה q .

איסטרטגיה.

אנחנו משתמשים בהנחה הנ"ל ופותרים את הבעיה מספר פעמים (איטרציה חיצונית עם המונה n) כאשר בכל פעם מגדילים את הדיוק הנדרש ובהתאמה (מאחר שהמרחק, המוכח ע"י החסם, בין ערך הפתרון בסוף כל צעד והערך האופטימלי הגלובלי - הוא קטן יותר) מקטינים בכל צעד את תחום השינוי המותר של q כלומר את Δ_0 . הפתרון הטוב ביותר שנמצא בצעד ה- n ($\bar{\delta}^k$) משמש כ- q^0 עבור הצעד ה- $n+1$ ובמקום לחשב את Δ_0 , כאמור בסעיף 8.1.1 עם תחום מלא של שנויים כמשתמע משיטת החישוב שם, לוקחים אחוז מסוים (קטן יותר בכל צעד) מהשינוי המלא.

הערה:

קים קשר ברור בין קצב ההקטנה של Δ_0 ובין מדת הסכון של לקיחת Δ_0 קטן מדי כך שלא יכלול את δ^* . אם קצב ההקטנה מתון (זהיר) נתן לקבל הקטנה משמעותית של זמן הפתרון עד רמת דיוק מבוקשת ולהשאר במדה גבוהה של ודאות בכך שבכל צעד אכן מתקים $\delta^* \in \Delta_0^n$. באופן מעשי נדרשים כמה נסיונות בעבודה עם בעיה חדשה על מנת להחליט מה רמת הדיוק ההתחלתית הטובה ביותר ומהו הקצב ה"בטוח" של הקטנת Δ_0 . נציין כי מנסיונות שערכנו עם בעיות דוגמה שפתרון הגלובלי ידוע לנו, מסתבר כי גישה זו היא מוצדקת, כלומר בדרך כלל מוגזם לקחת בתור Δ_0 את תחום השינויים המלא הנובע משיטת חישובה. בכל מקרה כדאי לזכור את העובדות הבאות:

1. החסם התחתון המתקבל הוא גלובלי ל- Δ_0 הנבחרת בכל רמת דיוק.
2. במקרים רבים נמצא הפתרון האופטימלי האמיתי (או קרוב לו) עוד בשלבים מוקדמים בהם הדיוק המבוקש הוא יחסית קטן.
3. ניתן להגדיל את הבטחון בפתרון המתקבל במחיר של הגדלת זמן החישוב.

8.5 פלט - תכולה.

ישנן דרכים שונות להגדרת והצגת הפלט של האלגוריתם. הגישה שלנו היא לאפשר קבלת פלט מגוון והצגתו ברמות שונות של פירוט. רמת הפירוט מבוקרת ע"י המשתמש. נסתפק כאן בהצגה לא מפורטת של רשימת מרכיבי פלט הנראים לנו רלבנטיים.

א. פרמטרים של הבעיה. מימדים.

ב. פרמטרים אלגוריתמיים. בקרה ואיסטרטגיה.

ג. תוצאות.

1. ערכים של משתני ההחלטה הטובים ביותר שהושגו.

2. ערך פונקציית המטרה הטוב ביותר שהושג.

3. חסם תחתון גלובלי.

4. הפער היחסי באחוזים.

5. מדת עמידה באילוצים. אילוצים אקטיביים.

ד. תוצאות ביניים של האיטרציות החיצוניות.

ה. סטטיסטיקה.

1. זמן ריצה.

2. מספר חיפושים מקומיים שבוצעו.

3. מספר פעמים שנפתרה הבעיה הדואלית.

4. פרופורצית הזמן בחיפוש מקומי.

בפרק העוסק בתוצאות מספריות נציג באופן מסודר את הפלט הקים בשלב זה.

8.6 אלגוריתם.

בסעיף זה נתאר במפורט את הצעדים המרכיבים את האלגוריתם המלא, כולל האיטרציה החיצונית שתוארה בסעיף איסטרטגיה. הסמונים והשגרות המופיעים בתאור האלגוריתם, הוגדרו בתחילת פרק זה. תרשים זרימה סכמטי מוצג בשרטוט 8.1 בסוף הפרק.

Algorithm

Input: network data , q^0 , $0 < \tau_1 \leq 1$, $0 < \tau_2 \leq 1$, α , ε , ε_0 , m , n_{max} , c_{max} , t_{max}

0. (initialization) $n = 0$, $k = 0$, $l = 0$, $\bar{\delta}^k = 0$, $c = 0$, $\varepsilon^n = \varepsilon_0$

$$LOC(\bar{\delta}^k) \rightarrow f \min^k, \bar{\delta}^k$$

$$DEL(q^0, \alpha) \rightarrow \Delta_0$$

$$gap^n = f \min^k \cdot \varepsilon^n / 100$$

$$\Delta^1 = \Delta_0$$

1. (main) $PART(\Delta^l) \rightarrow \Delta_i^l$, $i = 1, \dots, m$

$$DUAL(\Delta^l) \rightarrow g_{\Delta_i}^l$$
, $i = 1, \dots, m$

$$MIN(\Delta^l) \rightarrow \bar{i}^l, g_{\Delta_{\bar{i}^l}}^l$$

2. (branch or bound crit.) if $(f \min^k - g_{\Delta_{\bar{i}^l}}^l \leq gap^n)$ then (bound) goto 3.

else (branch) goto 4.

3. (bound) $c = 0$
 if ($l = 0$) then (end of outer iteration) goto 5.
 else
 $g_{\Delta_i}^{l-1} \leftarrow g_{\Delta_i}^l, l \leftarrow l - 1$
 $\text{MIN}(\Delta^l) \rightarrow \bar{i}^l, g_{\Delta_i}^l$
 goto 2.
4. (branch) $c \leftarrow c + 1$
 $\Delta^{l+1} \leftarrow \Delta_i^l$
 $l \leftarrow l + 1$
 if ($c > c_{\max}$) then (local search)
 $\hat{\delta} = \text{center of } \Delta^l$
 $k \leftarrow k + 1$
 $\text{LOC}(\hat{\delta}) \rightarrow f \min^k, \bar{\delta}^k$
 $c = 0$
 goto 1.
5. (outer iteration) $B^n = g_{\Delta_i}^l$
 output intermediate results
 $n \leftarrow n + 1$
 if ($\text{time} \geq t_{\max}$ or $n > n_{\max}$ or
 $(f \min^k - B^n) / f \min^k \cdot 100 \leq \varepsilon$) then (end of run)
 goto 6.
 else
 $\varepsilon^n = (f \min^k - B^n) / f \min^k \cdot 100 \cdot \tau_1$
 $\text{gap}^n = f \min^k \cdot \varepsilon^n / 100$
 $\text{CHANGQ}(\bar{\delta}^k) \rightarrow q^0$
 $\alpha \leftarrow \alpha \cdot \tau_2$
 $\text{DEL}(q^0, \alpha) \rightarrow \Delta_0$
 $\Delta^l = \Delta_0$
 goto 1.
6. (end of run) $B = B^n$
 $f \min = f \min^k$
 $\bar{\delta} = \bar{\delta}^k$
 output results
 stop

התכונות העיקריות של האלגוריתם מסוכמות במשפט הבא:

משפט 8.1 (נכונות).

1. לכל $\epsilon^n > 0$, מתקים בהכרח הקריטריון ל-bound אחרי מספר סופי של צעדי branch.
2. אם $f \min^k > f \min^* + \text{gap}^n$ אזי קים $\bar{k} > k$ כך ש- $f \min^{\bar{k}} < f \min^k$.
3. מ-1 ו-2 נובע כי האלגוריתם עוצר בהכרח.
4. ללא מגבלת זמן, האלגוריתם עוצר אם ורק אם $f \min - B \leq \text{gap}^n$ כאשר $n = n_{\max} + 1$.
5. אם ϵ_0 מספיק גדול וזמן הריצה עבר את מגבלת הזמן, אזי האלגוריתם עוצר עם תוצאה $f \min - B \leq \text{gap}^n$ כאשר $n \leq n_{\max}$.

הוכחה

1. נובע ישירות ממשפט 7.8.
2. נובע מכלל הבחירה של התיבה $\Delta_i^1 \subset \Delta_i$ כבסיס להמשך הסעוף עבור השלב ה- $l+1$ בהתקים הקריטריון ל-branch ומהקריטריון לבחירת נקודות להתחלת חיפוש מקומי.
3. הוא תוצאה של השקולים הבאים: $\{f \min^k\}$ היא סדרה משפרת (לפי 2) ומ-1 נובע שסדרת החסמים המקומיים

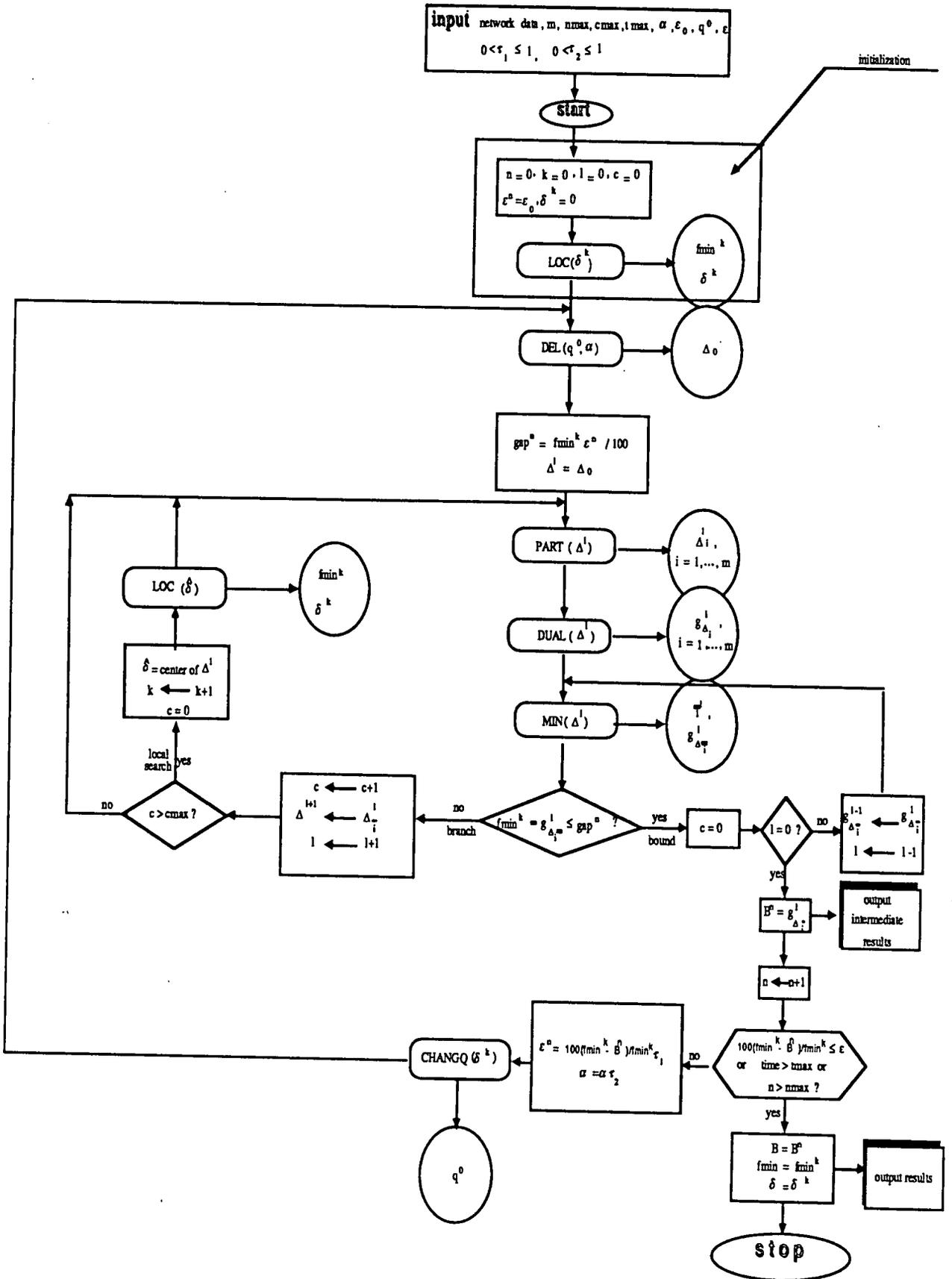
$$\{g_{\Delta_i}^1\} \text{ מכילה תת-סדרה עולה המתכנסת ל-} B^n \forall n.$$

- 4 ו-5 הם תוצאה הכרחית של קריטריון העצירה של האלגוריתם.

◇

הערה:

אין כאן טענה על קצב התכנסות או זמן עצירה של האלגוריתם. משך הריצה תלוי, כפי שכבר נאמר, בעיקר בשלושת הגורמים הבאים: 1 שהוא המימד של δ , גודלו של Δ_0 ו-הדיוק הסופי הנדרש $\epsilon^{n_{\max}}$. בעוד שהגורם הראשון הוא נתון לכל בעיה ספציפית, שני הגורמים האחרים ניתנים לבקרה ונשלטים. בחירה נבונה שלהם מאפשרת (לפחות כך מעיד הנסיון שלנו) לקבל תוצאות טובות גם לבעיות לא כל כך קטנות. נסיון נוסף נדרש על מנת לשפר את הבצוע במקרים של בעיות גדולות.



שרטוט מס. 8.1: תנשים ורימה של האלגוריתם.

Fig. no. 8.1: Flow chart of the algorithm.

9 הרחבות של המודל.

בפרק זה נרחיב את המודל (P) והניסוחים הנוגזים ממנו (P1) ו-(P2) ונשלב בהם אלמנטים הידראוליים נוספים חרישות תפעוליות נוספות. כמו כן נראה שהתאוריה הדואלית שפיתחנו בפרק 7 והאלגוריתם שהוצג על בסיס תאוריה זו בפרק 8, נשארים תקפים אחרי ההרחבות. ההרחבות תכלולנה את הנושאים הבאים:

1. שילוב משאבות ומאגרי ויסות.

2. תכנון לשני מצבי עומס.

3. הוספת האילוץ $|q_j| \geq q_j^{\min}$, $j = 1, \dots, e$.

9.1 שילוב משאבות ומאגרי ויסות.

משאבה היא אלמנט הידראולי בו מתקיים הפסד עומד שלילי (כלומר תוספת עומד) לכיוון הזרימה דרכו. משאבה, כמו צינור ואלמנטים הידראוליים אחרים ניתנת לייצוג מתמטי באמצעות משוואת האלמנט שלה המתארת את תוספת העומד על פני המשאבה כפונקציה של הזרימה דרכה ופרמטרים פיזיים (גודל). משוואת אלמנט כזו עבור

צנור, למשל, היא משוואת Hazen - Williams שנוכרת בפרק 4.

עבור משאבה ומאגר ישנן התוצאות הבאות (ראה [Kessler 21]):

1. בהנחה שהמשאבה עובדת ביעילות מכסימלית, עולה שלמשאבות בעלות מהירות סבוב משתנה וכן למשאבות בעלות מהירות סבוב קבועה מתאימה אותה משוואה מהצורה: $\Delta h = k_b q^2 b^{-4}$, כאשר b הוא קוטר המאיץ (מ'), k_b הוא קבוע התלוי בסוג המשאבה, q הוא הזרימה דרך המשאבה (ספיקה) (מ' מעוקב לשעה) ו- Δh הוא תוספת העומד (מ') לכיוון הזרימה. עבור כל צירוף של q ו- Δh קיים קוטר מאיץ יחיד כך שהמשאבה תפעל ביעילות מכסימלית. סוג המשאבה נקבע ע"י הצורה הגיאומטרית של המאיץ והוא מוגדר באמצעות פרמטר חסר מימדים, הקרוי מהירות סגולית, המתאר את מהירות המאיץ ביחס למהירות הזרימה של המים.

2. מחיר המשאבה מתחלק למחיר הציוד והוצאות אנרגיה ואחזקה. אפשר להניח שמחיר הציוד הוא פונקציה של קוטר המאיץ והוצאות אחזקה ואנרגיה הן פרופורציונליות להספק השאיבה. המחיר הכולל למשאבה כולל מנוע ניתן לקירוב ע"י הבטוי הבא ([Kessler 21]):

$$(9.1) \quad \text{cost}(\text{pump}) = cB \cdot b^\eta + cHP \cdot q \cdot \Delta h + \text{constant}$$

כאשר b הוא קוטר המאיץ, η ו- cB הם מקדמי הרגרסיה של הקירוב למחיר הציוד ו- cHP הוא מקדם של הוצאות אנרגיה ואחזקה והוא תלוי במספר שעות השאיבה, ביעילות המשאבה במקדם החזר ההון ובמערכת היחידות. עבור משאבות קטנות ובינוניות, מחיר הוצאות האנרגיה והאחזקה הוא גדול יחסית למחיר הציוד וניתן לקרב את המחיר הכולל של המשאבה ע"י פונקציה ליניארית של הספק השאיבה:

$$(9.2) \quad \text{cost} = k \cdot q \cdot \Delta h$$

3. מחיר מאגר ויסות תלוי בנפח המאגר ובמיקומו יחסית לפני הקרקע (גובה המאגר). בהנחה שמקום המאגר נקבע בשלב התכנון הבסיסי של הרשת והוא איננו חלק מבעיית התכנן, ניתן לקרב את מחיר המאגר כפונקציה

ליניארית של רום ממוצע של פני המים מעל הקרקע (ראה [2] Alperovits and Shamir):

$$(9.3) \quad \text{cost (reservoir)} = cR \cdot (h - h_{GL}) = cR \cdot \Delta h$$

כאשר h הוא רום פני המים הממוצע, h_{GL} הוא רום פני הקרקע ו- cR הוא המחיר לתוספת יח' גובה לרום המים במאגר.

9.1.1 שילוב משאבה ומאגר ויסות במודל

ממשואת האלמנט של משאבה ופונקציות המחיר של משאבה ומאגר נובע כי אם נבחר את משתני ההחלטה המיצגים משאבה ומאגר במודל שלנו, כ- Δh עם המשמעות המתאימה עבור משאבה (תוספת העומד) ועבור מאגר (תוספת גובה), אזי נוכל לשלב משאבה ומאגר בגרף של הרשת ובמודל המתמטי שלה מבלי לפגוע באף אחת מהתכונות היסודיות שאיפשרו את הגישה שלנו לפתרון הבעיה. השילוב המוצע יעשה בדרך הבאה: נוסיף עבור כל משאבה ומאגר הקימים או מתוכננים ברשת, צלע במקום המתאים: אם בצומת מסוים מתוכננים משאבה או מאגר, נפצל את הצומת הזה לשני צמתים כאשר הצלע המתאימה למשאבה או המאגר, מחברת ביניהם. צלע כזו, בניגוד לצלעות הרגילות המיצגות צינור בין צמתים, תורכב מקטע אחד בלבד באופן שרכיב הוקטור x (במודל) המתאים לקטע זה ייצג את תוספת העומד (עבור משאבה) או את תוספת הגובה (עבור מאגר). הרכיב של וקטור המחירים המתאים למשאבה יקבל את הערך kq וזה המתאים למאגר יקבל את הערך cR . שים לב בפרט כי וקטור המחירים החדש תלוי ב- q אבל פונקציות המטרה נשארת ליניארית לכל q נתון.

עבור כל משאבה ומאגר תתוסיף במטריצה O במודל שלנו שורה בה יהיה אלמנט אחד עם הערך 1 במקום המתאים לקטע ושאר האלמנטים אפס. (יש לשים לב כי רכיב הזרימה העובר דרך המשאבה או נכנס אל המאגר יהיה q_j המתאים). באילוצים המתאימים לשורות השיכות למשאבות ומאגרים במטריצה O בבלוק $Ox = a$ יתחלף סימן השיוון באי שיוון \leq והם יהיו מהצורה $O_i^T x \leq a_i$ כאשר a_i הוא חסם עליון על תוספת העומד (גובה) עבור המשאבה (מאגר) המיוצגים ע"י השורה ה- i של O . המשתנים הדואליים y_i המתאימים לאילוצים פרימליים אלו יהיו לכן בלתי מוגבלים בסימן. הגודל המתאים למשאבה ולמאגר במטריצה האלכסונית J יהיה (-1) (הפסד עומד שלילי לכיון הזרימה) במקום המתאים לרכיב הרלבנטי של x .

קל לראות כי עם הגדרות ונסוח כנ"ל, הבעיה הפנימית ב-(P1) וב-(P2) נשארת ליניארית.

גם בבעיה הדואלית $(D)_Q$ או $(D)_\Delta$ לא משתנה שום דבר באופן עקרוני.

האילוץ הדואלי המתאים למשאבה הוא מהצורה: $\tau_k(q) = \gamma_k^1 + \gamma_k^2 + \gamma_k^3 + c_k(q_j) \geq 0$ כאשר

$\gamma_k^i = y_i^T Z^k$, $i = 1, 2, 3$ הם קבועים ביחס ל- q (בלתי תלויים בו). נובע שאילוץ דואלי השייך למשאבה הוא פונקציה התלויה באופן מונוטוני ברכיב אחד ורק אחד q_j . האילוץ הדואלי השייך למאגר איננו תלוי כלל ב- q כך שכל התכונות של הבעיה הדואלית שנוצלו לבנית האלגוריתם שלנו נשארות תקפות הן במקרה של הוספת משאבה והן במקרה של הוספת מאגר לרשת.

בחישוב תת-גרדינט לצורך שימוש ב-BT לחיפוש מקומי יש להכניס שינוי. לביטוי (6.11) יש להוסיף (לחבר) את האיבר $x^0 (\nabla_{\delta} c(q^0 + L^T \delta))^T$ כאשר $(\nabla_{\delta} c(q^0 + L^T \delta))$ היא מטריצת היעקוביאן של וקטור המחירים $c(\delta) = c(q^0 + L^T \delta)$ ו- x^0 הוא הפתרון האופטימלי הפרימלי של הבעיה הפנימית (הליניארית) ב-(P2). שינוי זה איננו גורם שום קושי עקרוני ותוספת החישוב הנדרשת איננה משמעותית.

מסקנה:

השילוב של משאבות ומאגרים למודל הבסיסי המיצג את בעיית התכן, אם מבוצע בדרך שתוארה לעיל בסעיף זה, איננו משנה את התכונות העקרוניות של המודל וניתן להשתמש באלגוריתם שלנו לפתרון הבעיה ללא שינוי.

9.2 תכנון לשני מצבי עומס.

התנאים בהם תצטרך לפעול הרשת המתוכננת כוללים בדרך כלל מצבים שונים באופן קיצוני זה מזה. למשל אפשר להשתמש במאגרי עזר בשעות של שיא ביקוש ולמלא את המאגרים בשעות בהן הביקוש נמוך. הצורך להביא בחשבון מצבי עומס שונים זה מזה, בשלב התכן, הוא לכן דרישה טבעית. ברור שדרישה כזו מציגה אילוצים קשים ומצמצמת במידה ניכרת את תחום הפתרונות האפשריים. הגישה המוצעת כאן לשילוב מצבי עומס שונים במודל של בעיית התכן, מוכתבת ע"י הצורך לשמר את התכונות המשאירות את התוצאות התיאורטיות של פרק 7 בתוקף.

לשם פשטות נדון בשני מצבי עומס בלבד. ההרחבה למספר גדול יותר של מצבים היא ישירה אך נעיר כי הכנסת כל מצב עומס נוסף מגדילה את מימד הבעיה באופן ניכר ועבור רשתות מציאותיות לא נראה מעשי בשלב זה לטפל ביותר משני מצבים.

הוספת מצב עומס שני יעשה בצורה הבאה:

עבור כל צומת i נגדיר צומת נוסף i' ועבור כל צלע j נגדיר צלע נוספת j' . בדרך זו נקבל למעשה רשת כפולה. ננסח את כל האילוצים המתאימים עבור שני חלקי הרשת המורחבת כאשר בחלק אחד תהיה הזרימה מיוצגת ע"י תת-וקטור q ועבור החלק השני תהיה הזרימה מיוצגת ע"י תת-וקטור q' כך שהרכיב q_j מתאים לרכיב q'_j . משתנה ההחלטה המקורי x יוחלף במשתנה (x, x') כאשר x_i מתאים ל- x'_i בשני חלקי הרשת. גם וקטור המחירים המקורי c או $(c(q))$ במקרה שקימות משאבות) יוחלף בצורה דומה בוקטור (c, c') עם התאמה בין c_i ו- c'_i . עבור כל הקטעים המיצגים צנורות ומאגרים נוסיף למערכת אילוצים הקובעים: $x_i = x'_i$ לכל הרכיבים המתאימים בוקטור (x, x') . אילוצים כאלה לא יהיו עבור רכיבים המיצגים משאבות. בדרך זו נביא לידי ביטוי את האספקט התפעולי של הפעלת משאבה באופן שונה עבור מצב עומס שונה. ברור כי עבור כל הרכיבים c_i, c'_i המיצגים מחירים של צנורות ומאגרים נקח כל אחד בערך השווה למחצית הערך האמיתי שכן בסופו של דבר יהיה צנור יחיד ומאגר יחיד לכל קטע כזה ולא שניים כפי שמופיע בניסוח המוצע. במקרה של משאבה יופיע המחיר המקורי מאחר שבכל עומס יקבע Δh המתאים לאותה משאבה באופן בלתי תלוי ע"י פתרון המודל. הניסוח המוצע משאיר את המודל בצורתו המקורית עם מספר כפול של משתנים ותוספת של אילוצי שוויון שאינם תלויים בוקטור הזרימה המורחב (q, q') . ברור כי אילוצי המעגלים והמסלולים ייקבעו עבור שני המצבים (שני חלקי הרשת המורחבת) בנפרד. לצורך תקפות השיטה של פתרון הבעיה, נשים לב כי אילוצי השוויון הנוספים למודל אינם תלויים בזרימה, לכן הם מוסיפים לכל אילוף דואלי איבר שאינו תלוי בזרימה, כך שכל התכונות

המנוצלות לפיתוח שיטת הפתרון מתקימות גם לאחר ההרחבה.

9.3 הוספת האילוץ $|q_j| \geq q_j^{\min}, j=1, \dots, e$

משקולי אמינות דורשים לפעמים שהתכנון יכלול אילוץ המכתיב שבכל מקום הזרימה לא תהיה קטנה מערך

מינימלי נתון. על מנת לשלב את האלוץ הזה במודל שלנו נדרשים השנויים הבאים:

1. נשנה את הקבוצה Q והיא תהיה נתונה ע"י:

$$(9.4) \quad Q = \{q \in R^e : Dq = d, |q_j| \geq q_j^{\min}, j = 1, \dots, e\}$$

בהתאמה, עם q^0 מתאים כלשהו, נקבל את הקבוצה:

$$(9.5) \quad Q_\Delta = \left\{ \begin{array}{l} q(\delta) \in R^e : q(\delta) = q^0 + L^T \delta, \delta \in \Delta \subset R^1, \\ (q^0 + L^T \delta)_j \geq q_j^{\min}, j = 1, \dots, e \\ (q^0 + L^T \delta)_j \leq -q_j^{\min}, j = 1, \dots, e \end{array} \right\}$$

השינוי הנדרש עקב הוספת האילוץ הניל בפתרון הפרימלי של (P2) הוא הוספת פונקצית קנס מתאימה לאילוץ האמור לפונקצית המטרה של הבעיה החיצונית במודל (P2). לא נתן להשתמש ישירות באילוץ מכיון שהוא איננו קמור ואין בידינו כלי מתאים לטיפול באילוץ כזה. בנוסחה לחישוב תת הגרדינט יש להוסיף איבר מתאים לפונקצית הקנס. בפתרון הבעיה הדואלית $(D)_\Delta$ נצטרך להכניס שינוי בהגדרת \hat{q}^1 ו- \hat{q}^2 ובתהליך הפתרון כדלקמן:

נסמן ב- $BIG M$ ערך "גבוה מאד" כלשהו. נגדיר:

$$(9.6) \quad \hat{q}_j^1 = \left\{ \begin{array}{l} \min_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \text{ if } \min_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \leq -q_j^{\min} \text{ or } \min_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \geq q_j^{\min} \\ \text{else} \\ q_j^{\min} \text{ if } \max_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \geq q_j^{\min} \\ BIG M \text{ otherwise} \end{array} \right\}$$

$$(9.7) \quad \hat{q}_j^2 = \left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \text{ if } \max_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \leq -q_j^{\min} \text{ or } \max_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \geq q_j^{\min} \\ \text{else} \\ -q_j^{\min} \text{ if } \min_{\delta \in \Delta} (q^0 + L^T \delta)_j \leq -q_j^{\min} \\ BIG M \text{ otherwise} \end{array} \right\}$$

ברור ש-: $\hat{q}_j^1 = BIG M \Leftrightarrow \hat{q}_j^2 = BIG M$. אם זהו המצב עבור תיבה מסוימת Δ אזי לא נפתור את הבעיה

הדואלית על Δ תחזיר כפתרון את הערך $BIG M$ שפירושו: אין ערכים אפשריים ב- Δ .
פרט לשינוי הזה ישאר כל התהליך כפי שהיה בהגדרתו הבסיסית.

הערה:

אם הערכים המינימליים לערך המוחלט של רכיבי וקטור הזרימה הם קטנים יחסית אזי בדרך כלל גם ללא הוספת האילוץ, מקבלים פתרון אופטימלי אפשרי ביחס אליו. זה נובע מהאילוץ של קיום כלל המעגל של קירכהוף ההופך התאפסות או הקטנה יתרה (בערך מוחלט) של רכיב זרימה במעגל למצב לא אפשרי. לכן אפשר במקרים רבים להתעלם מהאילוץ ולהכניסו רק אם הפתרון האופטימלי המתקבל בלעדיו איננו מקובל משקולי אמינות.

10 דוגמאות מספריות.

האלגוריתם שהוצג בפרק הקודם, נוסה על מספר דוגמאות אשר נלקחו מהספרות. ניסינו להשאר עקביים עם הנתונים בהם נפתרו דוגמאות אלו בעבודות קודמות. במקרים שלא ניתן היה לשחזר במדויק את כל הנתונים, או שהנתונים אינם מתאימים למודל שלנו באופן מלא מלאנו את החסר כמיטב יכולתנו (ואז, כמובן, התוצאות אינן ממש ברורות השואה). במקומות המתאימים תבואנה הערות בענין זה עם הצגת הפתרונות. כל הדוגמאות שתוצגנה, נפתרו בתנאים שונים, על מנת לבחון את רגישות האלגוריתם לשינויים בערכים של פרמטרי בקרה ואסטרטגיה.

להלן רשימת הדוגמאות ומקורותיהן:

1. בעיה מס. 1 "The Two-Loop Network" תסומן אצלנו בשם "TWO-LOOP".
מקור: Kessler [21], Alperovits & Shamir [2].
2. בעיה מס. 2 "Hanoi Water Distribution Network" תסומן אצלנו בשם "HANOI".
מקור: Fujiwara & Khang [12].
3. בעיה מס. 3 "Complex Two-Loop Network" תסומן אצלנו בשם "COMPLEX-TWO-LOOP".
מקור: Kessler [21], Alperovits & Shamir [2].
4. בעיה מס. 4 "Real Network" תסומן אצלנו בשם "BIG".
מקור: Alperovits & Shamir [2].

תוצאות מספריות.

נפתח במספר הבהרות כלליות על המבנה של ביצוע נסיונות ההפעלה של האלגוריתם והצגת התוצאות. הבהרות אלו תופסות לגבי כל הדוגמאות שניציג. במדת הצורך נוסיף הבהרות נוספות בצמד להצגת התוצאות של יתר הדוגמאות.

התוצאות כוללות:

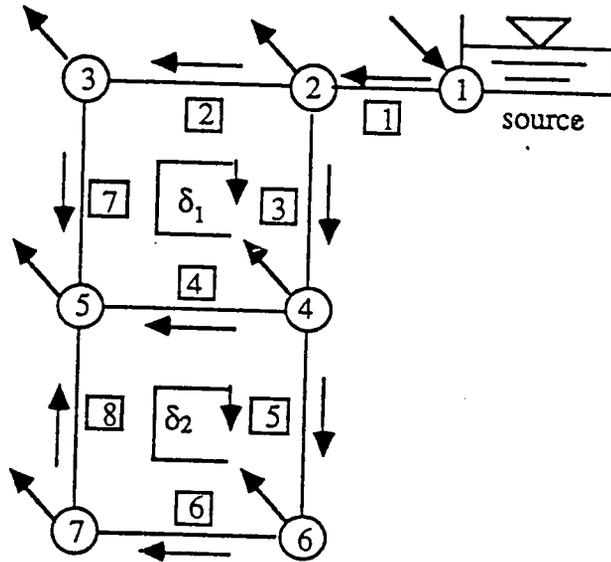
1. שם הבעיה.
1. ערכי פרמטרים אלגוריתמיים.
3. תוצאות עבור האיטרציות שבוצעו במהלך הריצה. התוצאה של האיטרציה האחרונה בכל ריצה - היא התוצאה הסופית. הסמונים בהם השתמשנו לצורך הצגת התוצאות, מוגדרים ומוסברים בפלט.
4. הפתרון שהתקבל, כולל:
- רכיב זרימה התחלתי וסופי בכל צלע (ערך שלילי של רכיב זרימה פרושו כי בפתרון, כיוון רכיב זה הוא הפוך מכיוון הצלע הרלבנטית).
- אורך של קטעי הצנורות בצלע וקטריהם.
5. נתונים על הפסדי העומד המותרים ואלו שהתקבלו בפועל עבור כל המסלולים המאולצים.
ניתן לראות במפורש מי הם המסלולים המגבילים. אלה הם כמובן אותם מסלולים אשר בהם שוה הפסד העומד בפועל להפסד המכסימלי המותר. לא ציינו במפורש את העומד המתקבל בכל צומת סופי במסלול, אך אלו ניתנים לחישוב פשוט מתוך האינפורמציה המוצגת.

הערה:

בכל הדוגמאות, לא הכנסנו אילוץ המגביל את הערך המוחלט של רכיבי הזרימה. ניתן לראות כי הערכים האופטימליים המוחלטים של כל הרכיבים הם גדולים מאפס (ראה הערה בפרק 9 (הרחבות של המודל)).

10.1 בעיה מס. 1 "TWO-LOOP"

זוהי דוגמה לרשת גרויטציונית פשוטה הכוללת שני מעגלים בסיסיים. הבעיה נפתרת ללא משאבות וללא מאגרים. הרשת הנפתרת בדוגמה זו מוצגת בשרטוט מס. 10.1.



שרטוט מס. 10.1: רשת גרויטציונית פשוטה עם מקור יחיד ועומס יחיד (בעיה מס. 1).

Fig. no. 10.1: Simple gravitational network with one source and one load (problem 1).

בשרטוט מוצגים מספרי הצלעות והצמתים. החיצים על יד הצלעות מראים את הכוון (השרירותי) שנבחר לכל צלע, כמו כן מוראה הכוון (גם הוא שרירותי) של הזרימה המעגלית בכל אחד משני המעגלים הבסיסיים. סמונים דומים יוצגו גם בדוגמאות הבאות. להלן הנתונים המספריים עבור דוגמה זו.

נתונים:

בטבלה מס. 10.1 נתונות העלויות ליח' אורך צינור בקטרים המסחריים הרלבנטיים. כל הצנורות הם Class 1 ומקדם Hazen-Williams עבור כולם: $chw=130$.

טבלה מס. 10.1: עלות למ' צינור בקטרים השונים.

Table no. 10.1: Cost of one m' pipe for different diameters.

מחיר למטר	קוטר (אינטש)
cost m'	diameter (")
2.0	1
5.0	2
8.0	3
11.0	4
16.0	6
23.0	8
32.0	10

טבלה מס. 10.1: עלות למ' צינור בקטרים השונים (המשך).
 Table no. 10.1: Cost of one m' pipe for different diameters (cont.).

מחיר למטר cost m'	קוטר (אינטש) diameter (")
50.0	12
60.0	14
90.0	16
130.0	18
170.0	20
300.0	22
550.0	24

בטבלה מס. 10.2 מוצגים נתוני הצמתים (ממוספרים על-פי שרטוט 10.1).

טבלה מס. 10.2: נתוני הצמתים.
 Table no. 10.2: Nodes data.

צריכה consumption מ"ק לשעה m^3 / h	מינימום עומד minimum head		רום קרקע earth level		צומת node
	מ'	מ'	מ'	מ'	
-1120.0	0.0		210.0		1
100.0	30.0		150.0		2
100.0	30.0		160.0		3
120.0	30.0		155.0		4
270.0	30.0		150.0		5
330.0	30.0		165.0		6
200.0	30.0		160.0		7

בטבלה מס. 10.3 מוצגים נתוני הצלעות.

טבלה מס. 10.3: נתוני הצלעות.

Table no. 10.3: Edges data.

צלע	אורך מ'	קטרים אפשריים אינטש
edge	length m'	possible diameters (")
1	1000.0	20, 18, 16, 14, 12
2	1000.0	14, 12, 10, 8, 6
3	1000.0	18, 16, 14, 12, 10
4	1000.0	8, 6, 4, 3
5	1000.0	18, 16, 14, 12, 10
6	1000.0	16, 14, 12, 10, 8
7	1000.0	14, 12, 10, 8, 6
8	1000.0	14, 12, 10, 8, 6

בטבלה מס. 10.4 מוצגים המסלולים המאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר. ההפסד המכסימלי המותר, מחושב לפי ההפרש היחסי של רום הקרקע בין צומת ראשון ואחרון והעומד המינימלי הנדרש בצומת האחרון במסלול.

טבלה מס. 10.4: מסלולים אשר עליהם קים אילוץ להפסד עומד מכסימלי מותר.

Table no. 10.4: Paths with head constraints.

מסלול	צומת ראשון	צומת אחרון	צלעות לפי סדר
path	first node	last node	edges in order
1	1	2	1
2	1	3	2, 1
3	1	4	3, 1
4	1	5	4, 3, 1
5	1	6	5, 3, 1
6	1	7	6, 5, 3, 1

פרוש זרימה התחלתי לא מוצג. ניסינו פרושים התחלתיים שונים וכפי שכבר צוין, האלגוריתם שלנו איננו רגיש במיוחד לטיב הפרוש ההתחלתי.

להלן תוצאות של מספר ריצות מיצגות.

בריצה הראשונה המוצגת נכנסנו עם וקטור זרימה התחלתי גרוע במיוחד (הנקודה ההתחלתית היא לא פיזיבילית). האלגוריתם איננו רגיש לכך והוא מוצא את הפתרון האופטימלי. בריצה השניה בחרנו וקטור זרימה התחלתי טוב יותר וחזרנו על תהליך הפתרון. התקבל אותו פתרון גלובלי.

בריצות האחרונות השארנו את וקטור הזרימה ההתחלתי כמו בריצה השניה, עברנו לפתרון באיטרציה אחת (זה ניתן להעשות בדרך כלל רק ברשתות קטנות יחסית) והגדלנו את הפער היחסי המבוקש בקפיצות של חצי אחוז כל פעם. שים לב לתלות בין זמן הריצה, מספר פעמים בהם נפתרה הבעיה הדואלית במשך הריצה והדיוק המבוקש, כאשר כל יתר הפרמטרים אינם משתנים.

PROBLEM: TWO-LOOPS

DIMENSIONS:

dim X = 88
 dim of constraints = 16
 dim Q = 8
 dim DELTA = 2

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 16
 initial gap = 10.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7
 stopping gap = 0.4 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

notations:

n = iteration no.
 Fmin = best value
 B = lower bound
 GAP % = (Fmin-B)/Fmin*100
 #D = no. of times the dual was solved (cum)
 ALPHA = proportion of full delta-zero
 TIME = time (min) up to end of iteration (cum)
 %TLOC = % of time in local search (cum)

initial fmin = ***** initial point is infeasible.

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC	
1	405434.79	396990.44	2.08	156	1.00	0.51	20.94	
2	405434.79	398790.65	1.64	189	0.22	0.60	18.01	
3	405434.79	400571.54	1.20	234	0.19	0.71	15.14	
4	405434.79	401564.92	0.95	285	0.16	0.84	12.82	
5	402348.35	401564.92	0.19	339	0.15	1.07	18.83	last iteration.

SOLUTION:

LINK	q0	q*	DIA"	LENGTH
1	1120.00	1120.00	18.0	1000.00
2	-30.50	373.34	10.0	761.98
			12.0	238.02
3	1050.50	646.66	16.0	1000.00
4	505.50	0.97	1.0	1000.00
5	425.00	525.69	14.0	371.14
			16.0	628.86
6	100.00	200.69	8.0	10.95
			10.0	989.05
7	-130.50	273.34	8.0	78.14
			10.0	921.86
8	-100.00	0.69	1.0	999.99
			2.0	0.01

HEAD LOSSES OVER PATHS

PATH LOSS ALLOWED

1	6.73	30.00
2	20.00	20.00
3	11.05	25.00
4	30.00	30.00
5	15.00	15.00
6	20.00	20.00

PROBLEM: TWO-LOOPS

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations	= 16
initial gap	= 10.0 %
reduction for gap	= 0.8
loc. crit (branch)	= 7
stopping gap	= 0.4 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 448593.14

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	415201.34	374403.59	9.83	45	1.00	0.20	38.41
2	415201.34	386577.65	6.89	60	0.31	0.24	32.03
3	415201.34	393920.81	5.13	87	0.26	0.30	25.08

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
4	415201.34	398614.77	3.99	123	0.23	0.40	19.33
5	415201.34	402108.40	3.15	189	0.20	0.56	13.74
6	404968.27	402108.40	0.71	249	0.18	0.76	16.75
7	402571.57	402108.40	0.12	273	0.08	0.87	20.39

נציג עתה תוצאות של סדרת ריצות בהן הכל, פרט לפער היחסי המותר, נשאר קבוע. הפער המותר הראשוני היה 0.5 ועלה ב- 0.5 בכל ריצה. שים לב לשינויים בזמני הריצות ובמספר הפעמים בהן נפתרה הבעיה הדואלית.

PROBLEM: TWO-LOOPS

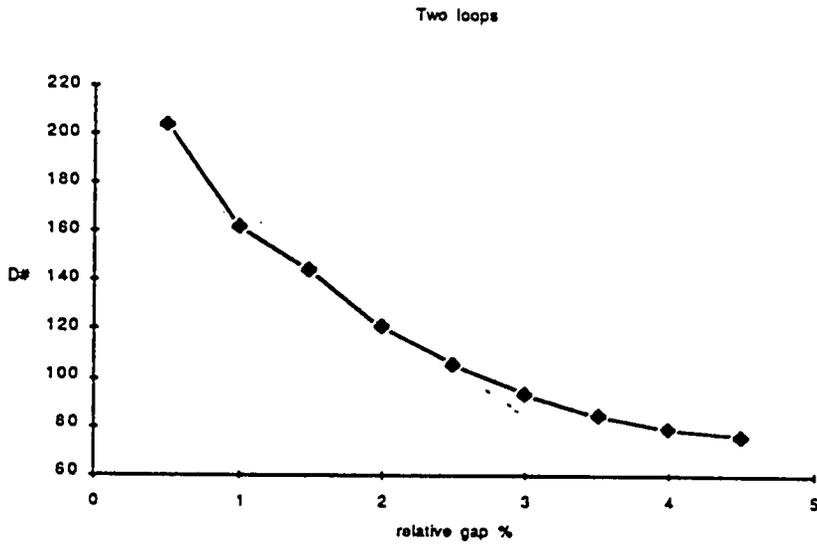
ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 1
 initial gap = 0.5 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7

RESULTS FOR ITERATIONS:

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	402352.06	400743.17	0.40	204	1.00	0.90	40.46
1	404676.45	400743.17	0.97	162	1.00	0.62	32.71
1	404676.45	398618.83	1.50	144	1.00	0.58	35.29
1	408889.23	400743.17	1.99	120	1.00	0.46	32.7
1	408889.23	399052.19	2.41	105	1.00	0.38	27.73
1	408889.23	397584.00	2.76	93	1.00	0.34	29.68
1	408889.23	395144.65	3.36	84	1.00	0.32	32.82
1	408889.23	392818.6	3.93	78	1.00	0.31	34.45
1	408889.23	388661.18	4.95	75	1.00	0.31	36.72

בגרף הבא מוצג מספר הפעמים שנפתרה הבעיה הדואלית בריצה כפונקציה של הדיוק המבוקש.

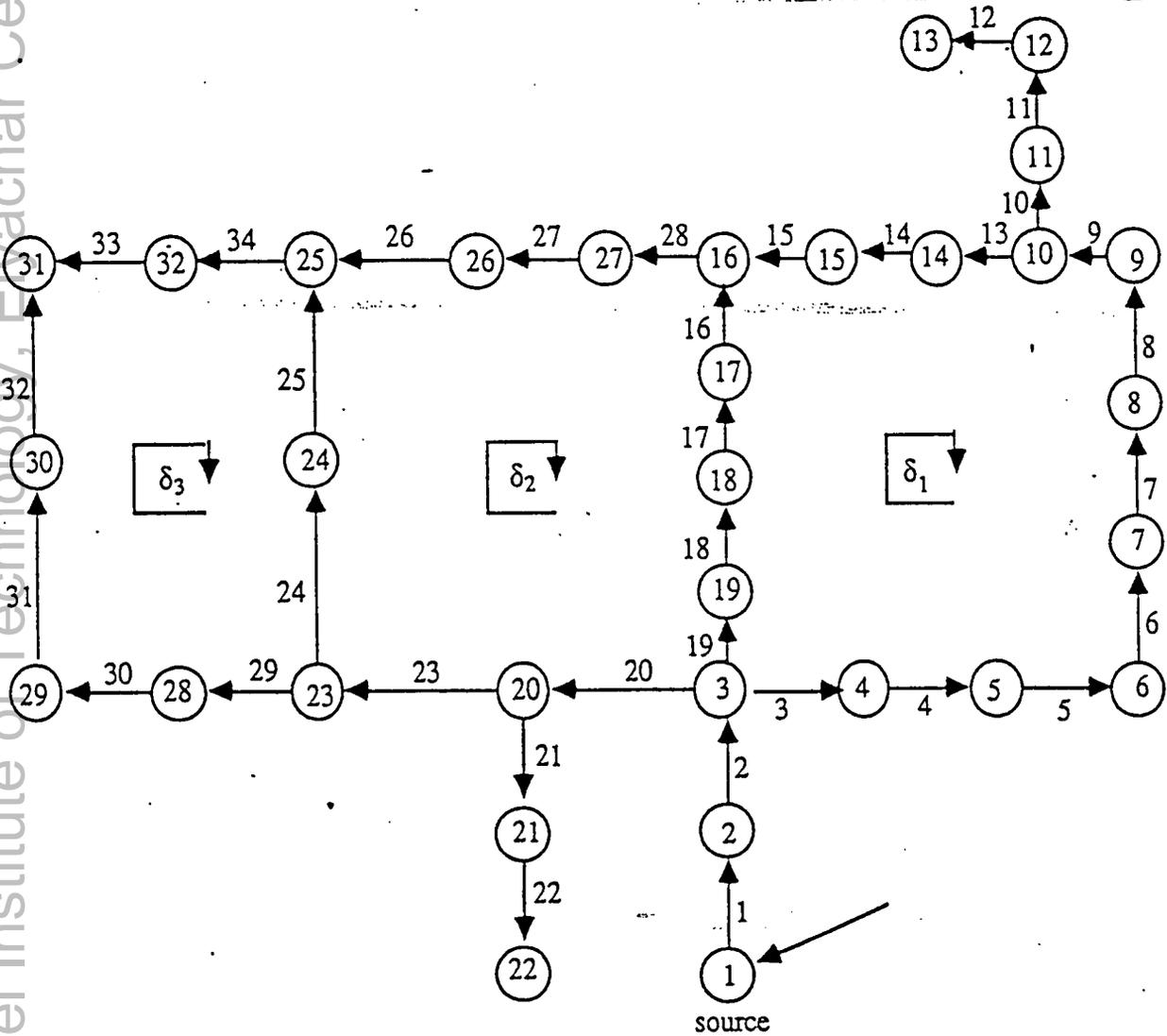


שרטוט מס. 10.2: מספר הפעמים שנפתרה הבעיה הדואלית במשך ריצה כפונקציה של הפער היחסי המבוקש (%)
Fig. no. 10.2: No. of times the dual prob. was solved in the run versus relative allowed gap (%)

10.2 בעיה מס. 2 "HANOI"

גם בדוגמה זו, נפתרת רשת גרויטציונית עם מקור יחיד ועומס יחיד. ההבדל בין רשת זו לרשת שנפתרה בדוגמה הקודמת ("TWO-LOOP"), היא בממדים של הרשת. הנתונים נלקחו מ- [12] Fujiwara & Khang.

בשרטוט מס. 10.3 מתוארת באופן סכמטי הרשת הנפתרת.



שרטוט 10.3: רשת חלוקת מים של הנוי (בעיה מס. 2).

Fig. no. 10.3: Hanoi water distribution network (problem 2).

נתונים:

עלויות צנרת עבור דוגמה זו מחושבים על ידי הנוסחה: $c(t) = b \cdot t^\beta$ כאשר $c(t)$ הוא העלות ליח' אורך של צינור בקוטר t , β ו- b הם קבועים שערכם תלוי ביחידות. במקרה שלנו יהיו, כמו במאמר [12], הקטרים נתונים באינטשים והערכים הם: $\beta = 1.5$, $b = 1.1$.

בדוגמה זו מניחים כי כל הצמתים נמצאים באותו רום קרקע ונתון העומד במקור. בטבלה מס. 10.5 מוצגים נתוני הצמתים.

טבלה מס. 10.5: נתוני צמתים.

Table no. 10.5: Nodes data.

צומת node	עומד מינימלי מ' minimum head m'	צריכה מ'ק לשעה consumption m ³ / h
1	100	-19940
2	30	890
3	30	850
4	30	130
5	30	725
6	30	1005
7	30	1350
8	30	550
9	30	525
10	30	525
11	30	500
12	30	560
13	30	940
14	30	615
15	30	280
16	30	310
17	30	865
18	30	1345
19	30	60
20	30	1275
21	30	930

טבלה מס. 10.5: נתוני צמתים (המשך).

Table no. 10.5: Nodes data (cont).

צריכה מ'ק לשעה consumption m^3/h	עומד מינימלי מ' minimum head m'	צומת node
485	30	22
1045	30	23
820	30	24
170	30	25
900	30	26
370	30	27
290	30	28
360	30	29
360	30	30
105	30	31
508	30	32

בטבלה מס. 10.6 מוצגים נתוני הצלעות. בדוגמה זו אנחנו משתמשים בפרוס הזרימה ההתחלתי הנתון במאמר. פרוס זה מוצג גם בטבלה 10.6. מניחים כי בכל הצלעות אפשריים לשמוש הקטרים הבאים (באינטש): 12, 16, 20, 24, 30, 40. מקדם Hazen-Williams הוא בכל הצנורות 130.

טבלה מס. 10.6: נתוני הצלעות.

Table no. 10.6: Edges data.

זרימה התחלתית מ'ק לשעה initial flow m^3/h	אורך מ' length m'	צלע edge
19940	100	1
19050	1350	2
8705	900	3
8575	1150	4
7850	1450	5
6845	450	6
5495	850	7

טבלה מס. 10.6: נתוני הצלעות (המשך).

Table no. 10.6: Edges data (cont).

זרימה התחלתית מ'ק לשעה initial flow m^3 / h	אורך מ' length m'	צלע edge
4945	850	8
4420	800	9
2000	950	10
1500	1200	11
940	3500	12
1895	800	13
1280	500	14
1000	550	15
1105	2730	16
1970	1750	17
3315	800	18
3375	400	19
6120	2200	20
1415	1500	21
485	500	22
3430	2650	23
1320	1230	24
500	1300	25
525	850	26
1425	300	27
1795	750	28
1065	1500	29
775	2000	30
415	1600	31
55	150	32
50	860	33
855	950	34

בטבלה מס. 10.7 מוצגים נתוני המסלולים המאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר. בדוגמה זו בנינו מסלולים המתחילים כולם בצומת המקור (מס. 1) ומסתיימים בהתאמה בכל אחד מהצמתים האחרים. נציג כאן רק את הצומת האחרון בכל אחד מהמסלולים (אין חשיבות לדרך בה עובר המסלול).

טבלה מס. 10.7: נתוני מסלולים מאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר.

Table no. 10.7: Path with head constraints.

צומת אחרון	מסלול
last node	path
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	10
12	11
13	12
14	13
15	14
16	15
17	16
18	17
19	18
20	19
21	20
22	21
23	22
24	23
25	24
26	25

טבלה מס. 10.7: נתוני מסלולים מאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר (המשד).

Table no. 10.7: Path with head constraints (cont).

צומת אחרון	מסלול
last node	path
27	26
28	27
29	28
30	29
31	30
32	31

להלן תוצאות של מספר ריצות מיצגות.

הפתרון המלא מוצג רק עבור הריצה הראשונה (ביתר הריצות התקבל למעשה אותו פתרון, או עם שינויים קטנים בלבד). עבור יתר הריצות יש שנויים בפרמטרים האלגוריתמיים ומוצגות התוצאות של האיטרציות. שים לב לשנויים בזמני הריצות.

PROBLEM: HANOI

DIMENSIONS:

dim X = 204
 dim of constraints = 68
 dim Q = 34
 dim DELTA = 3

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 16
 initial gap = 10.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7
 stopping gap = 0.4 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

notations:

n = iteration no.
 Fmin = best value
 B = lower bound
 GAP % = $(Fmin-B)/Fmin*100$
 #D = no. of times the dual was solved (cum)
 ALPHA = proportion of full delta-zero
 TIME = time (min) up to end of iteration (cum)
 %TLOC = % of time in local search (cum)

initial fmin = 6499986.56

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6175905.36	5561910.84	9.94	228	1.00	4.08	29.10
2	6175905.36	5683528.40	7.97	501	0.63	7.58	15.66
3	6175905.36	5780697.32	6.40	888	0.56	12.59	9.42
4	6175905.36	5860818.53	5.10	1467	0.51	20.19	5.88
5	6103842.12	5860818.53	3.98	1491	0.45	21.08	8.39
6	6103842.12	5901839.88	3.31	2241	0.40	30.90	5.73
7	6026908.19	5901839.88	2.08	2265	0.36	31.80	7.42
8	6026908.19	5901839.88	2.08	2265	0.29	31.80	7.42
9	6026908.19	5923524.68	1.72	2967	0.29	41.05	5.75
10	6026854.64	5944364.40	1.37	3843	0.26	53.75	6.56
11	6026854.64	5960781.60	1.10	4917	0.23	69.67	7.56
12	6026732.75	5973814.47	0.88	6234	0.21	89.53	8.50
13	6026732.75	5984359.86	0.70	7842	0.19	112.70	8.31
14	6026720.85	5992774.31	0.56	9870	0.17	142.61	8.64
15	6026720.85	5999568.26	0.45	12429	0.15	180.14	8.75
16	6026720.85	6005015.17	0.36	15621	0.13	226.05	8.51

SOLUTION:

LINK	q0	q*	DIA"	LENGTH
1	19940.00	19940.00	40.0	100.00
2	19050.00	19050.00	40.0	1350.00
3	8705.00	7740.68	40.0	900.00
4	8575.00	7610.68	40.0	1150.00
5	7850.00	6885.68	40.0	1450.00
6	6845.00	5880.68	40.0	450.00
7	5495.00	4530.68	40.0	850.00
8	4945.00	3980.68	40.0	850.00
9	4420.00	3455.68	30.0	641.17
			40.0	158.83
10	2000.00	2000.00	30.0	950.00
11	1500.00	1500.00	24.0	1198.96
			30.0	1.04
12	940.00	940.00	24.0	3500.00
13	1895.00	930.68	16.0	800.00
14	1280.00	315.68	12.0	500.00
15	1000.00	35.68	12.0	550.00
16	1105.00	284.08	12.0	2730.00
17	1970.00	1149.08	16.0	634.13
			20.0	1115.87
18	3315.00	2494.08	24.0	800.00
19	3375.00	2554.08	24.0	400.00
20	6120.00	7905.25	40.0	2200.00
21	1415.00	1415.00	16.0	514.12
			20.0	985.88
22	485.00	485.00	12.0	500.00
23	3430.00	5215.25	40.0	2650.00
24	1320.00	3573.06	30.0	1230.00
25	500.00	2753.06	30.0	1300.00
26	525.00	-1260.25	20.0	850.00

LINK	q0	q*	DIA"	LENGTH
27	1425.00	-360.25	12.0	7.28
			16.0	292.72
28	1795.00	9.75	12.0	750.00
29	1065.00	597.19	16.0	1500.00
30	775.00	307.19	12.0	1999.85
			16.0	0.15
31	415.00	-52.81	12.0	1600.00
32	55.00	-412.81	16.0	150.00
33	50.00	517.81	16.0	632.92
			20.0	227.08
34	855.00	1322.81	24.0	950.00

HEAD LOSSES OVER PATHS:

PATH LOSS ALLOWED

1	2.83	70.00
2	38.00	70.00
3	42.44	70.00
4	47.92	70.00
5	53.67	70.00
6	55.00	70.00
7	56.56	70.00
8	57.78	70.00
9	60.84	70.00
10	62.39	70.00
11	65.80	70.00
12	70.00	70.00
13	67.62	70.00
14	69.95	70.00
15	69.99	70.00
16	59.54	70.00
17	46.88	70.00
18	41.05	70.00
19	49.27	70.00
20	64.85	70.00
21	70.00	70.00
22	55.55	70.00
23	61.43	70.00
24	65.27	70.00
25	69.53	70.00
26	70.00	70.00
27	61.15	70.00
28	70.00	70.00
29	69.73	70.00
30	69.44	70.00
31	67.41	70.00

PROBLEM: HANOI

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 16
 initial gap = 10.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7

stopping gap = 0.4 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 6499986.56

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6175905.36	5561910.84	9.94	228	1.00	4.10	28.99
2	6175905.36	5684021.54	7.96	402	0.47	6.36	18.67
3	6175905.36	5781702.20	6.38	645	0.42	9.56	12.43
4	6175905.36	5860306.46	5.11	975	0.38	13.91	8.54
5	6175905.36	5923138.38	4.09	1497	0.34	20.79	5.71
6	6042640.78	5923138.38	1.98	1722	0.30	24.84	9.36
7	6042640.78	5923138.38	1.98	1722	0.21	24.84	9.36
8	6042640.78	5923138.38	1.98	1722	0.21	24.84	9.36
9	6042640.78	5939206.34	1.71	2382	0.21	33.71	6.89
10	6042640.78	5960543.60	1.36	3174	0.20	44.41	5.23
11	6042640.78	5976369.01	1.10	4248	0.17	58.89	3.95
12	6028097.80	5976369.01	0.86	4272	0.16	59.79	4.86
13	6026955.03	5984520.24	0.70	5586	0.14	78.67	5.24
14	6026872.17	5992943.15	0.56	7149	0.13	102.06	6.35
15	6026686.12	5999545.60	0.45	9126	0.11	130.48	6.31
16	6026686.12	6004981.86	0.36	11709	0.10	166.91	6.02

PROBLEM: HANOI

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 1
 initial gap = 0.5 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7
 stopping gap = 0.5 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 6499986.56

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6026854.30	5996000.82	0.51	4719	0.50	69.23	9.33

שינוי של וקטור הזרימה ההתחלתי. התקבלה נקודה התחלתית לא פיזיבילית. נמצא פתרון

אופטימלי גלובלי.

PROBLEM: HANOI

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 1
 initial gap = 0.5 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7
 stopping gap = 0.5 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = ***** the initial point is infeasible.

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6026709.30	6015819.62	0.18	11304	1.00	163.19	8.59

PROBLEM: HANOI

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 8
 initial gap = 10.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7
 stopping gap = 1.3 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 6499986.56

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6175905.36	5561910.84	9.94	228	1.00	4.10	28.95
2	6175905.36	5715879.13	7.45	435	0.47	6.82	17.43
3	6175905.36	5832134.42	5.57	738	0.41	10.79	11.02
4	6175905.36	5918768.00	4.16	1269	0.35	17.84	6.66
5	6041638.61	5918768.00	2.03	1467	0.31	21.56	10.89
6	6041638.61	5949906.57	1.52	2241	0.21	31.91	7.36
7	6026665.47	5958066.85	1.14	3207	0.18	45.41	6.43

בריצות הבהאות השארנו את הכל קבוע ובקשנו בכל פעם, מרווח גדול יותר בחצי אחוז.
שים לב לשינויים בזמן הריצה.

PROBLEM: HANOI

ALGORITHMIC PARAMETERS:

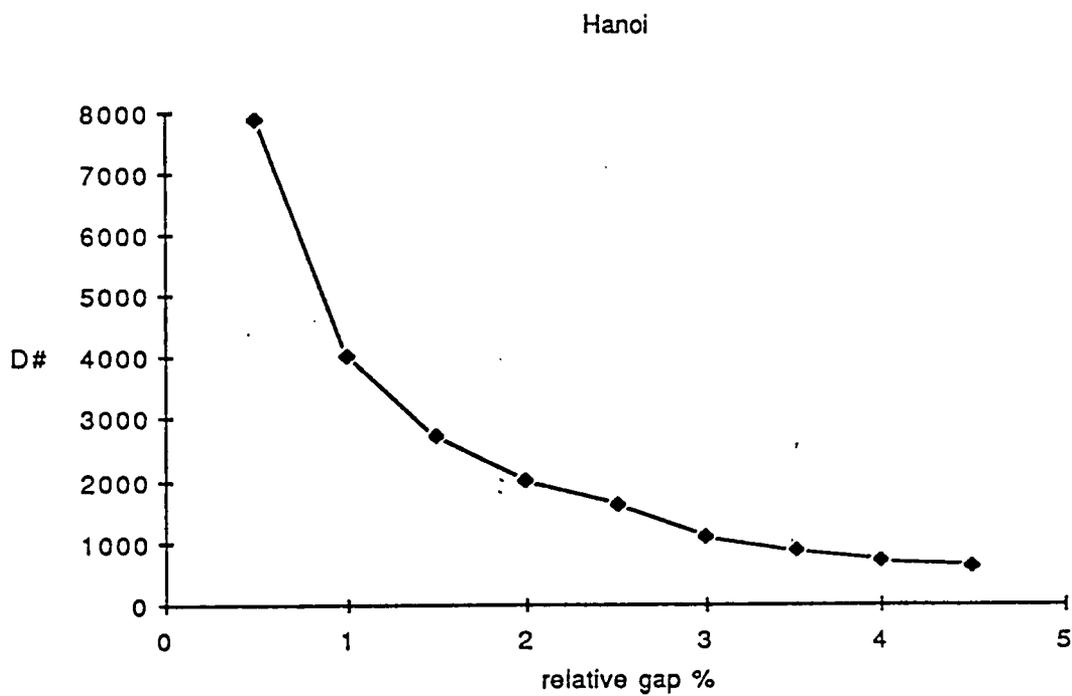
no. of iterations = 1
 initial gap = 0.4 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 7

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 6499986.56

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	6026660.26	6001973.67	0.41	7854	1.00	117.02	11.09
1	6026661.75	5965154.14	1.02	3999	1.00	59.82	11.82
1	6026804.90	5934273.46	1.54	2697	1.00	41.1	12.85
1	6031028.66	5908630.69	2.03	1995	1.00	30.22	13.32
1	6036715.74	5883283.93	2.54	1608	1.00	24.7	14.13
1	6027830.17	5846480.53	3.01	1089	1.00	17.7	19.87
1	6032858.78	5816703.47	3.58	843	1.00	14.43	24.11
1	6032858.78	5789435.93	4.03	687	1.00	12.44	28.24
1	6026916.93	5724806.53	5.01	612	1.00	10.84	27.08

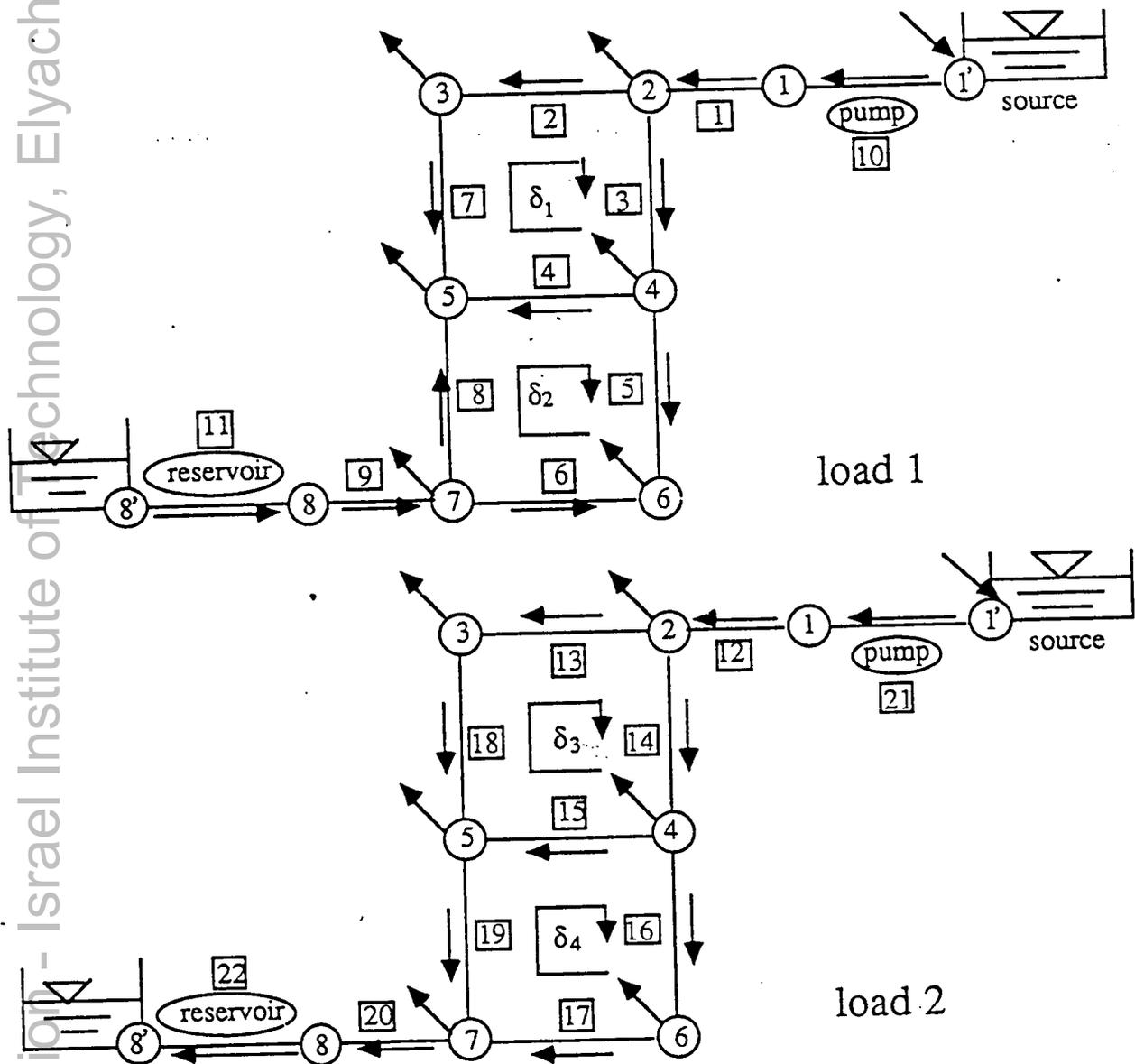
בגרף הבא מוצג מספר פעמים שנפתרה הבעיה הדואלית במשך ריצה כפונקציה של הדיוק המבוקש.



שרטוט מס. 10.4: מספר הפעמים שנפתרה הבעיה הדואלית במשך ריצה כפונקציה של הפער היחסי המבוקש (%).
 Fig. no. 10.4: No. of times the dual prob. was solved in the run versus relative allowed gap(%)

10.3 בעיה מס. 3 "COMPLEX-TWO-LOOP"

בדוגמה זו אנחנו פותרים רשת דומה לזו של בעיה מס. 1 אלא שכאן משולבים משאבה ומאגר והבעיה נפתרת לשני מצבי עומס. בשרטוט מס. 10.3 מוצגת הרשת בשני מצבי העומס. מצב עומס מס. 1 מתאים לזמן שיא הצריכה. המאגר משמש במצב זה כמקור נוסף. מצב עומס מס. 2 מתאים לזמן של צריכת מים נמוכה והמקור משמש למילוי המאגר. שילוב המשאבה והמאגר במודל הדרך הטיפול בשני מצבי עומס תוארו בפרוט בפרק 9 (הרחבת המודל). כל אלמנט ברשת מופיע פעמים (פעם אחת בכל מצב עומס). האילוצים נכתבים בנפרד עבור שני המצבים ונוספים אילוצים הקושרים את שני חלקי הרשת המורחבת למערכת אחת. מאחר שבבעיה זו יש לנו מקרה של שני מקורות נוסף עבור כל מצב עומס אילוץ שיוון הקובע את הפרש העומדים בשני המקורות. 1 וצומת מס. 8 לצורך הוספת צלעות המיצגות את המשאבה והמאגר, מוראה בשרטוט.



שרטוט מס. 10.5: רשת מורכבת הכוללת משאבה, מאגר, ושני מצבי עומס (בעיה מס. 3).

Fig. no. 10.5: Complex network includes pump, reservoir and two load conditions.

נתונים:

בדוגמה זו שנתוניה נלקחו מ- [2] Alperovits & Shamir השתמשנו עבור הצנרת באותן העלויות כמו בבעיה מס. 1 ("TWO-LOOP"). עלות הגבהת המאגר במטר אחד היא 2000. העלויות של שימוש במשאבה חושבו לפי הנוסחה של [21] Kessler (ראה גם פרק 9 לעיל). בהזנחת מחיר הציוד נתונה עלות הפעלת המשאבה כפונקציה ליניארית של הספק השאיבה. $cost(pump) = cHP \cdot q \cdot \Delta h$. מאחר שבעבודה של [2] Alperovits & Shamir הם השתמשו בחישוב עלויות השאיבה באופן קצת שונה היתה לנו בעיה בקביעת הערך cHP כך שנשאר עקביים. מתוך הנתונים הסקנו שערך מתאים בקרוב הוא 14.8 כאשר q הוא במיק לשעה ו- Δh במי.

בטבלה מס. 10.8 מוצגים נתוני הצמתים עבור שני מצבי העומס.

טבלה מס. 10.8: נתוני הצמתים עבור שני מצבי העומס.

Table no. 10.8: Nodes data for both loads conditions.

cons. m^3 / h load 2 עומס 2	צריכה מיק לשעה load 1 עומס 1	עומד מינימלי מ' minimum head m'	רום קרקע מ' earth level m'	צומת node
-300.0	-420.0	0.0	210.0	1
0.0	100.0	30.0	150.0	2
0.0	100.0	30.0	160.0	3
0.0	120.0	30.0	155.0	4
0.0	270.0	30.0	150.0	5
0.0	330.0	30.0	165.0	6
0.0	200.0	30.0	160.0	7
300.0	-700.0	0.0	195.5	8

בטבלה מס. 10.9 מוצגים נתוני הצלעות. גם בבעיה זו כמו ביתר הדוגמאות, מקדם Hazen-Williams הוא 130 לכל הצנורות. פרוסי הזרימה ההתחלתיים המוצגים בטבלה הם אלו ששמשו במקור. אנחנו נשתמש בהם לצורך השוואה.

טבלה מס. 10.9: נתוני הצלעות.
Table no. 10.9: Edges data.

קטרים אפשריים. אינטש possible dia. (")	זרימה התחלתית מ'ק לשעה initial flow m ³ / h עומס 1 load עומס 2 load	אורך מ' length m'	צלע edge
18,16,14,12,10	300.0 420.0	1000.0	1
10,8,6	100.0 110.0	1000.0	2
14,12,10,8	200.0 210.0	1000.0	3
10,8,6	100.0 10.0	1000.0	4
10,8,6	100.0 80.0	1000.0	5
16,14,12,10,8	100.0 250.0	1000.0	6
10,8,6	100.0 10.0	1000.0	7
16,14,12,10,8	200.0 250.0	1000.0	8
20,18,16,14,12	300.0 700.0	100.0	9

בטבלה מס. 10.10 מוצג פרוט המסלולים המאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר. שני המסלולים האחרונים הם בין המקור למאגר עבור שני מצבי העומס. הפסד העומד על מסלולים אלה מאולץ כשויון. אילוצי מסלול בין מקורות וצמתי צריכה מופיעים רק עבור עומס מס. 1. ההנחה היא שעבור עומס מס. 2 (שבו הצריכה בכל צמתי הצרכנים שוה לאפס) תנאי העומד יתקימו מאליהם אם יתקימו התנאים בעומס מס. 1. נציג בטבלה רק את הצומת הראשון והאחרון בכל מסלול.

טבלה מס. 10.10: פרוט המסלולים המאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר.
Table no. 10.10: paths with head constraints.

עומס load	צומת אחרון last node	צומת ראשון first node	מסלול path
1	3	1	1
1	4	1	2
1	5	1	3
1	6	1	4
1	7	8	5
1	8	1	6
2	8	1	7

להלן תוצאות של שתי ריצות מייצגות.

PROBLEM: COMPLEX TWO-LOOPS

DIMENSIONS:

dim X = 154
 dim of constraints = 110
 dim Q = 22
 dim DELTA = 4

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 16
 initial gap = 10.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 10
 stopping gap = 0.4 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

notations:

n = iteration no.
 Fmin = best value
 B = lower bound
 GAP % = $(Fmin-B)/Fmin*100$
 #D = no. of times the dual was solved (cum)
 ALPHA = proportion of full delta-zero
 TIME = time (min) up to end of iteration (cum)
 %TLOC = % of time in local search (cum)

initial fmin = 326469.08

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	295622.32	264663.79	10.47	93	1.00	1.49	46.54
2	295622.32	271370.91	8.20	138	0.49	1.96	35.53
3	295622.32	277077.00	6.27	177	0.43	2.35	29.63
4	295622.32	281300.93	4.84	243	0.38	3.01	23.15
5	295622.32	284321.59	3.82	372	0.33	4.25	16.36
6	295622.32	286668.61	3.03	621	0.29	6.63	10.49
7	295622.32	288476.16	2.42	939	0.26	9.68	7.19
8	295622.32	289927.27	1.93	1476	0.23	14.68	4.74
9	291079.34	289927.27	0.40	1683	0.21	16.91	5.39
10	291079.34	290215.41	0.30	1764	0.09	17.62	5.17

SOLUTION

Note:

This is a double load problem. Each link appears twice (once for each load).
 Dia. of -1 stands for a pump. Its "length" is the head increment.
 Dia. of -2 stands for a reservoir. Its "length" is the height addition.

<u>LINK</u>	<u>q0</u>	<u>q*</u>	<u>DIA."</u>	<u>LENGTH</u>	
1	420.00	420.00	10.0	24.51	load no. 1
			12.0	975.49	
2	110.00	89.28	6.0	842.42	
			8.0	157.58	
3	210.00	230.72	10.0	1000.00	
4	10.00	52.93	6.0	1000.00	
5	80.00	57.79	8.0	1.81	reservoir. load no. 2
			10.0	998.19	
6	250.00	272.21	8.0	0.00	
			12.0	1.27	
			14.0	998.73	
7	10.00	-10.72	6.0	991.42	
			8.0	8.58	
8	250.00	227.79	10.0	1000.00	
9	700.00	700.00	16.0	100.00	
11	700.00	700.00	-2.0	2.17	
12	300.00	300.00	10.0	24.51	
			12.0	975.49	
13	100.00	57.72	6.0	842.42	
			8.0	157.58	
14	200.0	242.28	10.0	1000.00	
15	100.00	47.38	6.0	1000.00	
16	100.0	194.90	8.0	1.81	
			10.0	998.19	
17	100.00	194.90	12.0	1.27	
			14.0	998.73	
18	100.0	57.72	6.0	991.42	
			8.0	8.58	
19	200.00	105.10	10.0	1000.00	
20	300.00	300.00	16.0	100.00	
21	300.0	300.00	-1.0	4.15	pump.
22	300.00	300.00	-2.0	2.17	reservoir.

HEAD LOSSES OVER PATHS:

<u>PATH</u>	<u>LOSS</u>	<u>ALLOWED</u>
1	19.77	20.00
2	14.51	25.00
3	19.51	30.00

<u>PATH</u>	<u>LOSS</u>	<u>ALLOWED</u>
4	15.00	15.00
5	-1.67	5.50
6	15.00	15.00
7	15.00	15.00
3	19.56	30.00
4	15.00	15.00
5	-1.66	5.50
6	15.00	15.00
7	15.00	15.00

PROBLEM: COMPLEX TWO-LOOPS

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 1
 initial gap = 0.4 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 10
 stopping gap = 0.4 %

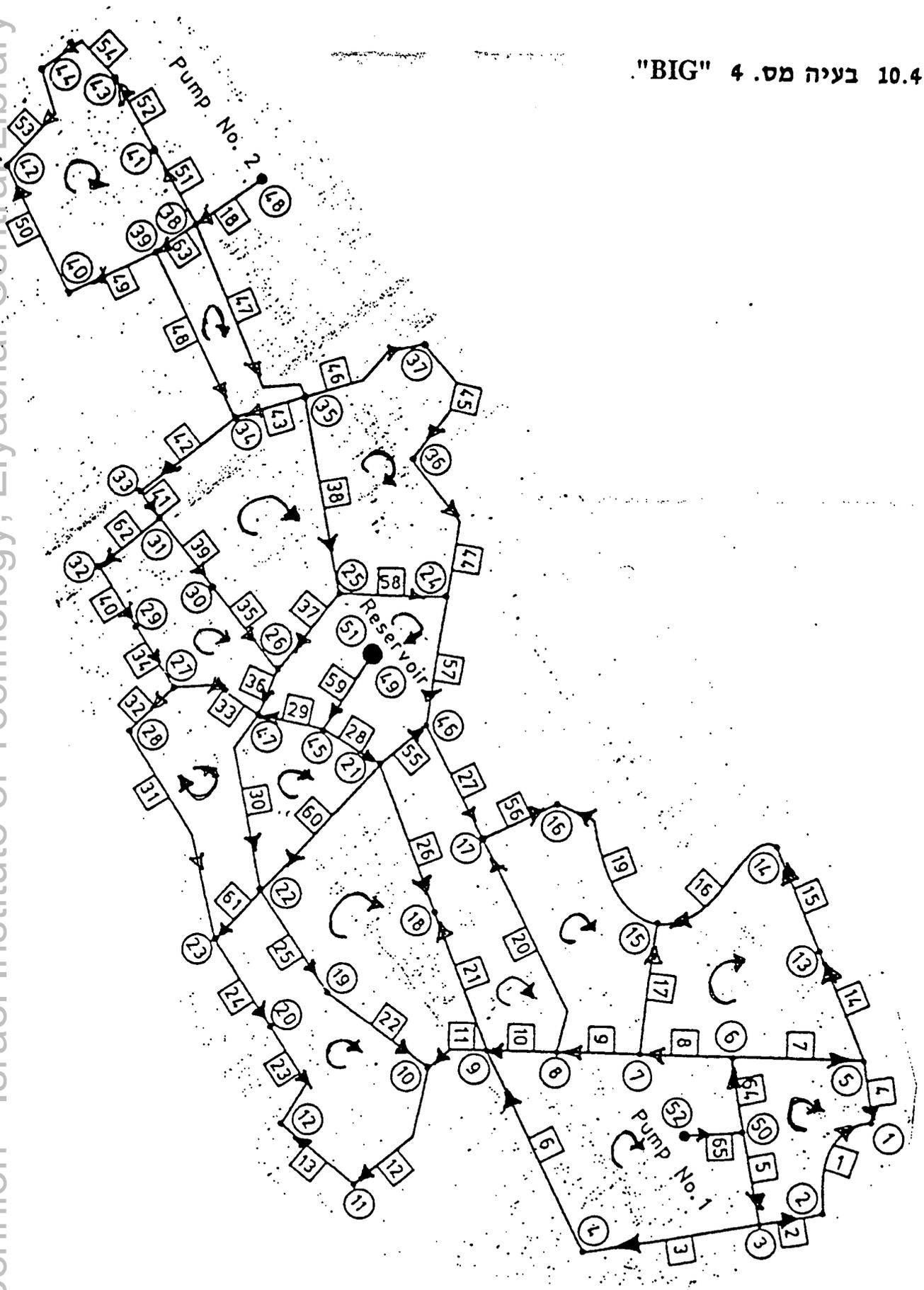
RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 326469.08

<u>n</u>	<u>Fmin</u>	<u>B</u>	<u>GAP %</u>	<u>#D</u>	<u>ALPHA</u>	<u>time</u>	<u>%TLOC</u>
1	292158.14	290942.40	0.42	1815	1.00	18.47	9.97

גם בדוגמה זו ערכנו ריצות רבות בתנאים שונים. מבנה התוצאות דומה לזה שבדוגמה הקודמת לכן נמנענו מלהציג תוצאות אלו.

10.4 בעיה מס. 4 "BIG"



שרטוט מס. 10.6: רשת "מציאותית" גדולה (בעיה מס. 4)
Fig. no. 10.6: A "real" big network (problem 4).

דוגמה זו לקוחה מ- [2] Alperovits & Shamir ובה נפתרת רשת "מציאותית" גדולה. הרשת הנפתרת כוללת שתי משאבות ומאגר. במאמר ממנו לקוחה הדוגמה נפתרה בעיה זו לשני מצבי עומס. אנחנו פתרנו את הבעיה עבור מצב עומס אחד בלבד עקב ממדי הבעיה והזמן הרב הנדרש לפתרון. מצב העומס שנפתר הוא מצב מס. 1 במקור. זהו מצב של שיא צריכה בו מוזנת הרשת משלושה מקורות: שתי המשאבות והמאגר. בעיקר חשוב לשים לב כי מספר המעגלים הבסיסיים בבעיה זו הוא 15. למימד זה יש השפעה נכרת על הזמן הנדרש לייצור חסם הדוק. בשרטוט מס. 10.4 (המועתק מהמקור) מוצגת הרשת הנפתרת.

נתונים:

עלויות הצנרת הן כמו בדוגמאות הקודמות (2 ו-3). עלות השאיבה חושבה כמו בבבעיה מס. 3 כאשר ערך הקבוע הוא 15. עלות הגבהת גובה המאגר במטר אחד היא כאן 12000. בטבלה מס. 10.11 מוצגים נתוני הצמתים ברשת.

טבלה מס. 10.11: נתוני הצמתים.

Table no. 10.11: nodes data.

צומת node	רום קרקע מ' earth level m'	עומד מינימלי מ' minimum head m'	צריכה מיק לשעה consumption m ³ /h
1	370.2	30.0	25.0
2	350.0	30.0	37.0
3	335.7	30.0	80.0
4	340.0	30.0	115.0
5	357.0	30.0	27.0
6	345.4	30.0	85.0
7	318.8	30.0	29.0
8	317.4	30.0	55.0
9	315.1	30.0	32.0
10	309.1	30.0	43.0
11	306.0	30.0	34.0
12	309.0	30.0	70.0
13	360.0	30.0	29.0
14	360.0	30.0	24.0
15	348.2	30.0	56.0
16	360.0	30.0	39.0
17	342.5	30.0	67.0
18	331.0	30.0	45.0
19	311.1	30.0	53.0
20	306.3	30.0	31.0
21	343.7	30.0	33.0
22	315.7	30.0	88.0
23	308.8	30.0	0.0
24	366.7	30.0	16.0

טבלה מס. 10.11: נתוני הצמתים (המשד).

Table no. 10.11: nodes data (cont).

צריכה מיק לשעה consumption m ³ /h	עומד מינימלי מ' minimum head m'	רום קרקע מ' earth level m'	צומת node
45.0	30.0	341.9	25
7.0	30.0	326.8	26
36.0	30.0	313.4	27
58.0	30.0	305.7	28
23.0	30.0	311.9	29
30.0	30.0	321.8	30
31.0	30.0	327.2	31
17.0	30.0	320.0	32
16.0	30.0	340.0	33
26.0	30.0	350.0	34
65.0	30.0	355.6	35
16.0	30.0	361.0	36
6.0	30.0	370.0	37
30.0	30.0	358.1	38
29.0	30.0	353.2	39
26.0	30.0	345.0	40
24.0	30.0	359.3	41
35.0	30.0	348.2	42
23.0	30.0	262.2	43
29.0	30.0	358.4	44
3.0	30.0	370.6	45
13.0	30.0	360.0	46
17.0	30.0	315.8	47
611.0	0.0	406.0	48
439.0	0.0	401.0	49
0.0	0.0	406.0	50
667.0	0.0	406.0	52

צומת מס. 51 איננו מופיע מכיון שהוא מתאר בשרטוט את המאגר עבור עומס מס. 2 שאיננו מטופל כאן.
 בטבלה מס. 10.12 מוצגים נתוני הצלעות. מקדם Hazen-Williams הוא גם כאן 130 לכל הצנורות.

טבלה מס. 10.12: נתוני הצלעות.

Table no. 10.12: Edges data.

קטרים אפשריים אינטש possible diameters (")	זרימה התחלתית מ'ק לשעה initial flow m ³ / h	אורך מ' length m'	צלע edge
6,4,3	10.0	640.0	1
10,8,6,4	47.0	485.0	2
16,14,12,10,8	150.0	895.0	3
6,4,3	15.0	335.0	4
16,14,12,10,8	277.0	860.0	5
14,12,10,8,6	35.0	1285.0	6
14,12,10,8,6	151.0	715.0	7
16,14,12,10,8	154.0	570.0	8
16,14,12,10,8	105.0	420.0	9
16,14,12,10,8	32.0	370.0	10
16,14,12,10,8	25.0	390.0	11
12,10,8,6	14.0	855.0	12
10,8,6,4	20.0	610.0	13
12,10,8,6	109.0	705.0	14
12,10,8,6	80.0	640.0	15
10,8,6,4	56.0	385.0	16
8,6,4,3	20.0	765.0	17
20,18,16,14,12	611.0	150.0	18
10,8,6,4	20.0	890.0	19
8,6,4,3	18.0	1260.0	20
12,10,8,6	10.0	805.0	21
12,10,8,6	32.0	685.0	22
12,10,8,6	90.0	675.0	23
14,12,10,8,6	121.0	570.0	24
12,10,8,6	85.0	660.0	25
12,10,8,6	35.0	890.0	26
10,8,6,4	68.0	710.0	27
16,14,12,10,8	278.0	400.0	28
14,12,10,8,6	158.0	400.0	29
14,12,10,8,6	150.0	980.0	30
6,4,3	7.0	1150.0	31
10,8,6,4	65.0	365.0	32
10,8,6,4	4.0	470.0	33
12,10,8,6	105.0	325.0	34
10,8,6,4	5.0	530.0	35
12,10,8,6	5.0	280.0	36
8,6,4	7.0	600.0	37

טבלה מס. 10.12: נתוני הצלעות (המשד).

Table no. 10.12: Edges data (cont).

קטרים אפשריים אינטש possible diameters (")	זרימה התחלתית מיק לשעה initial flow m ³ / h	אורך מ' length m'	צלע edge
10, 8, 6, 4	70.0	1085.0	38
10, 8, 6, 4	35.0	440.0	39
14, 12, 10, 8, 6	128.0	495.0	40
16, 14, 12, 10, 8	211.0	300.0	41
16, 14, 12, 10, 8	227.0	630.0	42
6, 4, 3	14.0	330.0	43
6, 4, 3	5.0	900.0	44
8, 6, 4, 3	21.0	770.0	45
8, 6, 4, 3	27.0	790.0	46
14, 12, 10, 8, 6	166.0	1175.0	47
16, 14, 12, 10, 8	249.0	970.0	48
10, 8, 6, 4	57.0	525.0	49
8, 6, 4, 3	31.0	785.0	50
12, 10, 8, 6	80.0	430.0	51
10, 8, 6, 4	56.0	460.0	52
6, 4, 3	4.0	885.0	53
8, 6, 4, 3	33.0	495.0	54
10, 8, 6, 4	74.0	395.0	55
8, 6, 4, 3	19.0	505.0	56
6, 4, 3	7.0	765.0	57
6, 4, 3	18.0	585.0	58
18, 16, 14, 12, 10	439.0	150.0	59
14, 12, 10, 8, 6	136.0	960.0	60
12, 10, 8, 6	113.0	370.0	61
14, 12, 10, 8, 6	145.0	410.0	62
16, 14, 12, 10, 8	335.0	275.0	63
18, 16, 14, 12, 10	390.0	70.0	64
20, 18, 16, 14, 12	667.0	20.0	65
משאבה מס. 2	611.0	1000.0	66
מאגר	439.0	1000.0	67
משאבה מס. 1	667.0	1000.0	68

האורך 1000.0 של צלעות 66, 67, 68 המייצגות את המשאבות והמאגרים מייצג חסם עליון על תוספת העומד והגובה למשאבות ולמאגר בהתאמה (אפשר, כמובן, לקחת ערכים הרבה יותר קטנים אך אין לזה כל השפעה).

בטבלה מס. 10.13 מוצגים נתוני המסלולים המאולצים להפסד עומד מכסימלי מותר. שני המסלולים האחרונים בטבלה מאלצים את הפרשי העומדים בין המקורות והאילוצים המתאימים להם הם אילוצי שיוון.

טבלה מס. 10.13: נתוני המסלולים.

Table no. 10.13: Paths data.

צומת אחרון last node	צומת ראשון first node	מסלול path
45	49	1
46	49	2
1	52	3
12	52	4
14	52	5
16	52	6
18	52	7
24	48	8
32	48	9
37	48	10
42	48	11
44	48	12
49	52	13
48	52	14

להלן תוצאות של שלוש ריצות מיצגות. יש להעיר כי הזמן הנדרש לפתרון בעיה זו לדרגת הדיוק המוצגת בדוגמאות הקודמות (הקטנות ממנה במימדיהן), הוא רב. ניתן לראות כי בשלוש הריצות המוצגות כאן, הושגה מגבלת הזמן שהטלנו והאלגוריתם עצר עם התוצאה הטובה ביותר שהצליח להשיג. בריצות השניה והשלישית הושג דיוק טוב יותר מכיון שהקטנו את מרחב החיפוש הרלבנטי (Δ_0). בריצה השלישית השארנו הכל כמו בריצה השניה, אך שינינו את נוהל החלוקות: בכל חלוקה היו שני חלקים במקום שלושה. אין כל שינוי משמעותי כתוצאה מכך אף כי להגדלת מספר החלוקות מעל שלוש, יש בדרך כלל השפעה שלילית על הבצוע (כפי שנוכחנו בנסיונות רבים בדוגמאות השונות).

PROBLEM: BIG

DIMENSIONS:

dim X = 340
 dim of constraints = 267
 dim Q = 68
 dim DELTA = 15

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 13
 initial gap = 25.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 8
 stopping gap = 1.7 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

notations:

n = iteration no.
 Fmin = best value
 B = lower bound
 GAP % = $(Fmin-B)/Fmin*100$
 #D = no. of times the dual was solved (cum)
 ALPHA = proportion of full delta-zero
 TIME = time (min) up to end of iteration (cum)
 %TLOC = % of time in local search (cum)

initial fmin = 937163.97

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	789442.31	592088.83	25.00	690	0.30	23.37	38.60
2	760510.95	602710.29	20.75	2172	0.50	73.69	36.09
3	747221.39	621089.25	16.88	3864	0.46	130.69	35.93
4	727810.40	627053.58	13.84	5091	0.41	181.09	38.70

SOLUTION

Note:

Dia. of -1 stands for a pump. Its "length" is the head increment.
 Dia. of -2 stands for a reservoir. Its "length" is the height addition.

LINK	q0	q*	DIA"	LENGTH
1	10.00	-16.19	3.0	574.11
			4.0	65.89
2	47.00	20.81	4.0	485.00
3	150.00	119.63	8.0	895.00
4	15.00	41.19	6.0	335.00
5	277.00	220.44	8.0	619.51
			10.0	240.49
6	35.00	4.63	6.0	1285.00
7	151.00	144.19	8.0	210.71
			10.0	504.29
8	154.00	217.38	8.0	570.00
9	105.00	164.08	8.0	420.00
10	32.00	113.18	8.0	370.00
11	25.00	113.15	8.0	390.00
12	14.00	40.22	6.0	855.00
13	20.00	46.22	4.0	610.00
14	109.00	76.00	6.0	705.00
15	80.00	47.00	6.0	640.00
16	56.00	23.00	4.0	379.37
			6.0	5.63
17	20.00	24.30	4.0	665.81
			6.0	99.19
18	611.00	611.00	16.0	150.00
19	20.00	-8.70	4.0	890.00
20	18.00	-4.10	3.0	1260.00
21	10.00	-27.35	6.0	805.00
22	32.00	-29.93	6.0	685.00
23	90.00	63.78	6.0	675.00
24	121.00	94.78	6.0	566.07
			8.0	3.93
25	85.00	23.07	6.0	660.00
26	35.00	72.35	6.0	890.00
27	68.00	118.80	6.0	39.24
			8.0	670.76
28	278.00	321.68	10.0	136.18
			12.0	263.82
29	158.00	114.32	6.0	400.00
30	150.00	126.55	6.0	3.30
			8.0	976.70
31	7.00	-7.04	3.0	1150.00
32	65.00	50.96	4.0	195.20
			6.0	169.80
33	4.00	-37.37	4.0	470.00
34	105.00	49.59	6.0	325.00
35	5.00	11.01	4.0	218.17
			6.0	311.83

LINK	q0	q*	DIA"	LENGTH
36	5.00	66.60	8.0	280.00
37	7.00	62.59	4.0	4.63
			6.0	595.37
38	70.00	125.61	8.0	339.01
			10.0	745.99
39	35.00	41.01	6.0	440.00
40	128.00	72.59	6.0	495.00
41	211.00	161.60	10.0	300.00
42	227.00	177.60	10.0	630.00
43	14.00	10.83	3.0	328.64
			4.0	1.36
44	5.00	-1.22	3.0	900.00
45	21.00	14.78	3.0	76.84
			4.0	693.16
46	27.00	20.78	6.0	790.00
47	166.00	212.23	10.0	671.03
			12.0	503.97
48	249.00	202.77	10.0	970.00
49	57.00	47.96	4.0	525.00
50	31.00	21.96	3.0	136.66
			4.0	648.34
51	80.00	89.04	6.0	430.00
52	56.00	65.04	6.0	460.00
53	4.00	13.04	3.0	885.00
54	33.00	42.04	4.0	318.11
			6.0	176.89
55	74.00	130.99	8.0	46.62
			10.0	348.38
56	19.00	47.70	6.0	505.00
57	7.00	0.81	3.0	765.00
58	18.00	18.03	6.0	585.00
59	439.00	439.00	14.0	150.00
60	136.00	85.34	6.0	954.42
			8.0	5.58
61	113.00	100.82	6.0	370.00
62	145.00	89.59	6.0	410.00
63	335.00	279.72	10.0	275.00
64	390.00	446.56	10.0	70.00
65	667.00	667.00	12.0	7.01
			14.0	12.99
66	611.00	611.00	-1.0	0.05 pump.
67	439.00	439.00	-2.0	0.21 reservoir.

HEAD LOSSES OVER PATHS:

<u>PATH</u>	<u>LOSS</u>	<u>ALLOWED</u>
1	0.40	0.40
2	4.35	11.00
3	5.80	5.80
4	39.04	67.00
5	14.21	16.00
6	16.00	16.00
7	16.21	45.00
8	9.30	9.30
9	16.73	56.00
10	6.00	6.00
11	27.30	27.80
12	17.60	17.60
13	5.00	5.00
14	0.00	0.00

PROBLEM: BIG

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 13
 initial gap = 25.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 8
 stopping gap = 1.7 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 937163.97

<u>n</u>	<u>Fmin</u>	<u>B</u>	<u>GAP %</u>	<u>#D</u>	<u>ALPHA</u>	<u>time</u>	<u>%TLOC</u>
1	789442.31	592088.83	25.00	690	0.30	23.47	38.46
2	789442.31	631560.22	20.00	1089	0.25	32.42	27.84
3	754707.66	631560.22	16.32	1116	0.22	35.87	33.08
4	754707.66	656192.88	13.05	2436	0.20	66.53	17.83
5	743559.55	664783.28	10.59	5565	0.18	162.52	21.42
6	728384.60	665379.30	8.65	8727	0.16	252.69	20.63
7	723636.86	673244.09	6.96	9390	0.15	276.83	21.92

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
8	721320.57	681009.38	5.59	14868	0.13	484.72	28.47
time limit							
last iteration							
9	721320.57	681009.38	5.59	24972	0.12	834.36	29.97

PROBLEM: BIG

ALGORITHMIC PARAMETERS:

no. of iterations = 13
 initial gap = 25.0 %
 reduction for gap = 0.8
 loc. crit (branch) = 8
 stopping gap = 1.7 %

RESULTS FOR ITERATIONS:

initial fmin = 937163.97

n	Fmin	B	GAP %	#D	ALPHA	time	%TLOC
1	763607.01	574269.98	24.80	1714	0.30	88.04	57.76
2	763607.01	612369.47	19.81	1740	0.25	88.65	57.37
3	752808.10	631946.30	16.05	1836	0.22	93.67	57.32
4	750757.83	654205.09	12.86	2306	0.20	116.10	56.10
5	741052.26	663830.05	10.42	3092	0.18	157.04	56.33
6	734023.73	672257.64	8.41	5256	0.16	260.64	55.09
7	725541.79	676131.10	6.81	7020	0.15	346.77	54.77
8	725541.79	686015.28	5.45	12934	0.13	619.77	53.43
time limit							
last iteration							
9	724610.94	686015.28	5.33	17852	0.12	837.10	52.32

11 סיכום ומסקנות.

החסרונות והקשיים העקריים בשיטות הקימות עד כה לפתרון בעית התכנן של רשתות חלוקת מים הם הבאים:

1. בכל השיטות הקימות, למעט שיטות אנומרציה שאינן ישימות בדרך כלל עקב זמן החישוב הנדרש, מקבלים במקרה הטוב פתרון אופטימלי מקומי. במקרים רבים גם אי אפשר להוכיח או לבסס אופטימליות מקומית ומסתפקים בפתרון אפשרי "סביר". היוצאת מכלל זה, במדה מסוימת, היא השטה הקרויה NLPG של Fujiwara and Khang [12], המבצעים צעדים כוון של שיפור פתרונות מקומיים.
2. לא זו בלבד שאין תהליך של חיפוש גלובלי, לא נמצאה עד כה כל דרך להעריך את טיב הפתרון המקומי המתקבל.
3. בגלל מימד גבוה ואי קמירות המאפיינים את בעית התכנן, נראה עדיף לטפל בבעיה בגישה של דקומפוזיציה במשתנים, כלומר לבצע את המינימיזציה בשני שלבים. הבעיה הנובעת מגישה כזו היא קטנה יותר במימד ובנסוח מתאים כוללת תת-בעיה ליניארית, אולם מצד שני היא בעיה לא חלקה.
4. בשיטות הקימות נקבעים בדרך כלל כווני הזרימה בהתחלה. לא ניתן לשנותם במשך תהליך הפתרון, כך שהחיפוש יכלול את כל מרחב הפתרונות האפשריים.

מטרת עבודה זו היתה לנסות להתגבר במדת האפשר על הקשיים האמורים.

ניראה ששיטת הפתרון המוצעת אכן משיגה במדה רבה את המטרה. האלגוריתם שפיתחנו מבצע חיפוש גלובלי ומוצא פתרון גלובלי מקורב. יתר על כן, בד בבד עם ייצור הפתרון, האלגוריתם מיצר חסם תחתון הדוק, המשמש להערכת שגיאת הקירוב. חיפוש מקומי מתבצע תוך שמוש בשיטת Bundle-Trust העשויה למינימיזציה של פונקציות לא קמורות ולא חלקות. במהלך העבודה פתרנו בהצלחה מספר בעיות דוגמה השונות זו מזו במימדיהן ובמורכבותן. המאמץ העקרי בהפעלת השיטה, קשור בהדוק החסם, המתבצע באמצעות תהליך מטיפוס של "סעף וחסום" (branch and bound). על פי טבעם, תהליכים כאלה הם אכספוננציאליים במימד מרחב הפתרונות. מכאן נובע הקושי לפתור לרמת דיוק מוכחת גבוהה רשתות גדולות במימדיהן. האלגוריתם המוצע כולל אמצעים לזרו את הבצוע, ונדרש נסיון מסוים עם רשת ספציפית הנתונה לפתרון. בכל מקרה, גם כאשר לא ניתן באופן מעשי להדק את החסם במדה הרצויה, מוכיח נסיונו בפתרון הדוגמאות, שערך טוב, מקורב לאופטימום הגלובלי, מתקבל כבר בשלב מוקדם יחסית של התהליך. האלגוריתם מספק תמיד את החסם ההדוק ביותר הניתן להשגה במגבלת זמן הריצה.

ברור כי דרושה עבודה נוספת, על מנת להפוך את האלגוריתם המוצג כאן לכלי שימושי בתכנון רשתות מציאותיות, אך, להערכתנו, גלום בו פוטנציאל בכיוון זה.

תרומה אפשרית נוספת של עקרונות השיטה שפיתחנו, קימת, אולי, בהפעלתה לפתרון בעיות אחרות. מסתבר שבעיות אשר המודל המייצג אותן ניחן במספר תכונות כגון מונוטוניות וספרביליות מסוימת של האילוצים הדואליים (תכונות שאינן בלעדיות למודל הרשת), ניתנות בעקרון לתקיפה בגישה דומה. מדת הישימות של גישה זו לבעיה ספציפית נתונה צריכה, כמובן, להבדק לגופו של ענין.


```

INTEGER MAXCOM,MAXIT,IPRINT,IWORK(2*reset+2*n),
& IDEL,IDELMAX,ichain,u,t,t1,t2,t3,t4,
& MMBOX,I,J,K,LEVEL,ICRIT(100,3),LEVMAX,
& JJ,KK
DOUBLE PRECISION BOXLL(N),BOXUU(N),DIF,LAMDA,FM,FACTOR(5),
& G(N),WORK(1work),XMIN(N), x(n),xold(n),
& FMIN,F,LOBOUND,LBOX(N),UBOX(N),reducdel,reducep,incep,
& RCRIT(100,10+2*N),hp(mp),
& EP,epinit,EPS,SSUM,SSUM1,
& DELLO(N),DELU0(N),dl0(n),du0(n),
& MINL(N),MINU(N),frand,drand,rand,
& BDUAL(n+MP+n1),CDUAL(2*NVAR),OBJDUAL,
& MAXDIF,MINLOBO,MAXA,fgap
integer id,itcount,itcount1,ipr,irand, seed
real tim,time,tibt,dtime,st(2)
INTRINSIC MOD,DEXP,DLOG,DABS,DMAX1,DMIN1,IDNINT,DBLE
EXTERNAL COMPFG,f77lid
fgap=ep*reducep**(idelmax)
1001 format(A2,2X,A12,2X,A12,2X,A6,2X,
& A4,3X,A6,2X,A5,2X,A5)
2000 format(A,1X,F5.1,1X,A)
2001 format(A,1X,F5.1)
2002 format(A,1X,I4)
2007 format(A,1X,F5.1,1X,F5.1,1X,F5.1,1X,F5.1,1X,F5.1)
write(7,*)'PROBLEM: 'HANOI'
write(7,*)'-----'
write(7,*)
write(7,*)'DIMENSIONS:'
write(7,*)'-----'
write(7,2002)'dim X          =',nvar
write(7,2002)'dim of constraints =',n+mp+n1
write(7,2002)'dim Q          =',n1
write(7,2002)'dim DELTA     =',n
write(7,*)
write(7,*)'ALGORITHMIC PARAMETERS:'
write(7,*)'-----'
write(7,2002)'no. of iterations =',idelmax+1
write(7,2000)'initial gap      =',ep,'% '
write(7,2001)'reduction for gap =',reducep
write(7,2002)'loc. crit (branch) =',t
write(7,2000)'stopping gap     =',ep*reducep**(idelmax),'%'
write(7,*)
write(7,*)'RESULTS FOR ITERATIONS'
write(7,*)'-----'
write(7,*)
write(7,*)'notations: '
write(7,*)
write(7,*)'n          = iteration no.'
write(7,*)'Fmin      = best value '
write(7,*)'B         = lower bound '
write(7,*)'GAP %     = (Fmin-B)/Fmin*100'
write(7,*)'#D       = no. of times the dual was solved (cum)'
write(7,*)'ALPHA    = proportion of full delta-zero '
write(7,*)'TIME     = time (min) up to end of iteration (cum)'
write(7,*)'%TLOC   = % of time in local search (cum)'
write(7,*)
tim=dtime(st)
time=time+tim
ichain=0

```

```

tibt=0.0
itcount=0
id=0
frand=1.0D15
LOBOUND=0.0d0
IDEL=0
nog=0
do 37 k=1,5
  tfactor(k)=1.0
37 continue
CALL DELTA0(DELL0,DELU0,FACTOR)
CALL COMPFG(n,Xmin,Fmin,G)
2008 format(A14,1X,F12.2)
  write(7,2008)'initial fmin =',fmin
  write(7,*)
  write(7,1001)'n', Fmin ' B ' ; 'GAP %'; #D',
& 'ALPHA','time','%TLOC'
  write(7,*)
  do 8 i=1,n1
    qz(i)=ql(i)
  8 continue
c
c check dual on singleton
c
  do 9 i=1,n
    minl(i)=0.0
    minu(i)=0.0
  9 continue
  if(ip.eq.0)then
    CALL DDUAL(minl,minu,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,lobound,ep,adual)
  else
    CALL PDUAL(minl,minu,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,ep,fmin,prdual)
  endif
  write(*,*)'initial dual',objdual
c
c compute dual on delta zero
c
  if(ip.eq.0)then...
    CALL DDUAL(dell0,delu0,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,lobound,ep,adual)
  else
    CALL PDUAL(dell0,delu0,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,ep,fmin,prdual)
  endif
  write(*,*)'dual on del zero',objdual
c
c
c nog=1
c
c random multi start
c
epinit=EP*fmin/100.0D0
do 42 i=1,irand
  fm=fmin-3*epinit
  rand=drand(seed)
  seed=seed+1
do 43 j=1,n
  x(j)=dell0(j)+rand*(delu0(j)-dell0(j))

```

```

43 continue
CALL COMPFG(n,X,Frاند,G)
write(*,*)frاند
maxcom=t1
maxit=t2
CALL BTNKNB(N,X,Frاند,G,COMPFG,FM,EPS,MAXCOM,MAXIT,RESET,
& IPRINT,DELL0,DELU0,IWORK,WORK,LWORK)
write(*,*)'loc',frاند
if(frاند.lt.fmin)then
fmin=frاند
write(*,*)'frاند',frاند
do 44 k=1,n
xmin(k)=x(k)
44 continue
endif
42 continue
c
c next iteration
c
222 CONTINUE
if(ipr.gt.0) then
write(*,*)'iter. fmin',idel+1,fmin
endif
itcount1=0
c
c doing local search only in first iteration
c
if(id.eq.0) then
do 34 j=1,n
xold(j)=xmin(j)
34 continue
do 7 i=1,2
do 33 j=1,n
x(j)=xold(j)
33 continue
do 35 k=1,3
tfactor(k)=tfactor(k)/2*i
35 continue
CALL DELTA0(minl,mini,tFACTOR)
tim=dtime(st)
time=time+tim
CALL COMPFG(n,X,F,G)
MAXIT=t1
MAXCOM=t2
fm=fmin-4.0*ep
CALL BTNKNB(N,X,F,G,COMPFG,FM,EPS,MAXCOM,MAXIT,RESET,
& IPRINT,minl,mini,IWORK,WORK,LWORK)
write(*,*)'loc',f
if(fmin.gt.f)then
fmin=f
do 46 j=1,n
xmin(j)=x(j)
46 continue
endif
tim=dtime(st)
tibt=tibt+tim
time=time+tim
7 continue
if (fmin .lt. 1.0d10) then

```

```

    EP=EP*fmin/100.0D0
    else
    EP=EP*objdual/100.0D0
    endif
endif
c
c end local search at first iteration
c
CALL CHANGQ(Xmin)
CALL DELTA0(DL0,DU0,FACTOR)
if(id.gt.0)then
do 225 i=1,n
dell0(i)=dmax1(dell0(i),dl0(i))
delu0(i)=dmin1(delu0(i),du0(i))
225 continue
endif
id=1
frand=fmin
IF(FMIN-LOBOUND.LE.EP) GOTO 9999
LEVEL=1
C
C start basic algorithm
C
CALL RESETBOX (LEVEL,RCRIT,DELU0,DELLO)
500 CONTINUE
IF(FMIN-LOBOUND.LE.EP) GOTO 9999
c
c find the largest component of current box
c
MAXDIF=-1.0D0
DO 20 I=1,N
DIF=RCRIT(LEVEL,10+N+I)-RCRIT(LEVEL,10+I)
IF(MAXDIF.LT.DIF) THEN
MAXDIF=DIF
ICRIT(LEVEL,2)=I
ENDIF
20 CONTINUE
c
c make current partition and solve dual for each part
c
DO 1 I=1,MMBOX
itcount=itcount+1
itcount1=itcount1+1
if(itcount1.ge.t3)then
ep=ep*incep
itcount1=0
endif
CALL NEXTBOX(MMBOX,LEVEL,BOXLL,BOXUU,ICRIT,RCRIT,I)
OBJDUAL=0.0D0
if(ip.eq.0) then
CALL DDUAL(BOXLL,BOXUU,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,lobound,ep,adual)
else
CALL PDUAL(BOXLL,BOXUU,BDUAL,CDUAL,
& OBJDUAL,LAMDA,ep,fmin,prdual)
endif
if (ipr.gt.0)then
WRITE(*,*)OBJDUAL
endif

```

```

rcrit(level,i)=objdual
1 CONTINUE
c
c check local search crit. and if satisfied,do it
c
  IF(ichain.ge.t
& .or.mod(itcount,tt).eq.0 )then
  ichain=0
  tim=dtime(st)
  time=time+tim
  fm=fmin-3*ep
  DO 11 j=1,n
  X(j)=BOXLL(j)+(BOXUU(j)-BOXLL(j))/2.0
11 CONTINUE
  nog=1
  CALL COMPFG(n,X,F,G)
  if(ipr.gt.0) then
    write(*,*)'f,f
  endif
  MAXCOM=t2
  MAXIT= t1
  CALL BTNKNB(n,X,F,G,COMPFG,FM,EPS,MAXCOM,MAXIT,RESET,
& IPRINT,del10,delu0,IWORK,WORK,LWORK)
  write(*,*)'f after bt',f
  IF(FMIN.GT.F.AND.F.GT.0.0D0) THEN
    fmin=f
    DO 585 j=1,n
      XMIN(j)=X(j)
585 CONTINUE
    endif
c
c end local search
c
    tim=dtime(st)
    tibt=tibt+tim
    time=time+tim
c
c check stopping time crit.
c
  if(time.ge.t4) goto 9888
  IF(FMIN-LOBOUND.LE.EP) GOTO 9999
  ENDIF
  CALL MINLO (N,MINLOBO,LEVEL,RCRIT,ICRIT,MMBOX,J)
  ICRIT(LEVEL,3)=J
550 CONTINUE
  IF(LEVEL.GT.1) THEN
c
c check bound condition
c
    IF(FMIN-MINLOBO.LE.EP) THEN
      ICRIT(LEVEL,1)=1
      RCRIT(LEVEL-1,ICRIT(LEVEL-1,3))=MINLOBO
      CALL MINLO (N,MINLOBO,LEVEL-1,RCRIT,ICRIT,MMBOX,J)
      ICRIT(LEVEL-1,3)=J
c
c move one level down
c
      LEVEL=LEVEL-1
      ichain=0

```

```

        if (ipr.gt.0)then
        WRITE(*,*) LEVEL
        endif
        IF(LEVEL.EQ.1) THEN
c
c   check end of iteration
c
        IF(FMIN-MINLOBO.LE.EP) THEN
            LOBOUND=dmax1(MINLOBO,lobound)
            ICRIT(LEVEL,1)=1
            GOTO 9999
        ELSE
c
c   if not end of iteration then continue (branch from level 1)
c
            GOTO 600
        ENDIF
        ELSE
c
c   current level gt 1. goto check if bound condition
c
            GOTO 550
        ENDIF
        ELSE
c
c   brunch condition. move one level up
c
            CALL UPDABOX(MMBOX,LEVEL,BOXLL,BOXUU,ICRIT,RCRIT)
            LEVEL=LEVEL+1
            ichain=ichain+1
            if (ipr.gt.0)then
            WRITE(*,*) LEVEL
            endif
            DO 70 I=1,N
                RCRIT(LEVEL,10+I)=BOXLL(I)
                RCRIT(LEVEL,10+N+I)=BOXUU(I)
70      CONTINUE
            GOTO 500
        ENDIF
        ENDIF
600 CONTINUE
c
c   level eq 1. check end of iteration
c
        IF(FMIN-lobound.LE.EP) THEN
            LOBOUND=dmax1(lobound,MINLOBO)
            GOTO 9999
        ELSE
c
c   brunch. update and move one level up
c
            CALL UPDABOX(MMBOX,LEVEL,BOXLL,BOXUU,ICRIT,RCRIT)
            LEVEL=LEVEL+1
            ichain=ichain+1
            DO 30 I=1,N
                RCRIT(LEVEL,10+I)=BOXLL(I)
                RCRIT(LEVEL,10+N+I)=BOXUU(I)
30      CONTINUE
            if (ipr.gt.0) then

```

```

WRITE(*,*) 'LEVEL
endif
GOTO 500
ENDIF
c
c end basic algorithm
c
9999 CONTINUE
tim=dtime(st)
time=time+tim
c
c output results for current iteration
c
1000 format(I2,2X,F12.2,2X,F12.2,2X,F5.2,2X,
& I5,2X,F6.2,2X,F6.2,2X,F6.2)
WRITE(7,1000)idel+1,fmin,lobound,(fmin-lobound)/fmin*100.0,
& itcount,factor(1),time/60.0,tibt/time*100.0
c
c check end of run
c
IF(IDEL.LT.IDELMAX.and.(fmin-lobound)/fmin*100.0.gt.fgap)THEN
write(*,*)'ep'
ep=(fmin-lobound)*reducep
write(*,*)'ep',ep
IDEL=IDEL+1
do 39 k=1,5
factor(k)=reducdel*DSQRT((fmin-lobound)/fmin*100)
39 continue
write(*,*)'factor',factor(1)
c
c goto next iteration
c
GOTO 222
ENDIF
c
c end of run
c
9888 continue
c
c output solution
c
NOG=0
CALL COMPFG(n,Xmin,Fmin,G)
write(7,*)
write(7,*)
write(7,*)'SOLUTION'
write(7,*)'-----'
write(7,*)
1005 format(A4,2X,A8,2X,A8,2X,A4,2X,A8)
write(7,1005)'LNK;' q0 ';' q* ';'DIA''; LENGTH '
write(7,*)
DO 95 i=1,N1
k=0
1002 format(I4,2X,F8.2,2X,F8.2,2X,F4.1,2X,F8.2)
1003 format(4X,2X,8X,2X,8X,2X,F4.1,2X,F8.2)
DO 40 j=1,MD
IF (XSO((I-1)*MD+J).NE.0.0D0) then
k=k+1
if(k.eq.1)

```



```

integer      macsz
parameter   (macsz=mac)
integer      marsz
parameter   (marsz=mar+1)
integer      matsz
parameter   (matsz=mac*mar)
integer      cstsz
parameter   (cstsz=macsz*3+1)
integer      rstsz
parameter   (rstsz=marsz*3+1)
integer      cex
parameter   (cex=macsz-mac)
integer      rex
parameter   (rex=marsz-mar)
double precision INFBND
parameter   (INFBND = 1.0e+20)
integer      objsen      / 1 /
double precision objx(macsz)
double precision rhsx(marsz)
character*1  senx(marsz)
integer      matbeg(macsz)
integer      matcnt(macsz)
integer      matind(0:matsz-1)
double precision matval(0:matsz-1)
double precision bdl(macsz)
double precision bdu(macsz)
character*3  datanm      / ' ' /
character*3  objnm       / ' ' /
character*3  rhsnm       / ' ' /
character*3  rngnm       / ' ' /
character*3  bndnm       / ' ' /
character*3  cstore(macsz) / macsz* ' ' /
character*3  rstore(marsz) / marsz* ' ' /
character*3  estore(1)
integer      idummy(1)
double precision ddummy(1)
integer      namlen      / 3 /
integer      lpstat
double precision obj
double precision x(macsz)
double precision pi(marsz)
double precision slack(marsz)
double precision dj(macsz)
INTRINSIC DABS,MOD
DO 60 J=1,N1
DO 70 I=1,n
  IF(L(I,J).EQ.1) THEN
    TABU(I,J)=BOXUU(I)
    TABL(I,J)=BOXLL(I)
  ENDIF
  IF(L(I,J).EQ.-1) THEN
    TABU(I,J)=-BOXLL(I)
    TABL(I,J)=-BOXUU(I)
  ENDIF
  IF(L(I,J).EQ.0) THEN
    TABU(I,J)=0.0D0
    TABL(I,J)=0.0D0
  ENDIF
70 CONTINUE

```

```

60 CONTINUE
  DO 80 J=1,N1
    SSUM=0.0
    SSUM1=0.0
    DO 90 I=1,n
      SSUM=SSUM+TABL(I,J)
      SSUM1=SSUM1+TABU(I,J)
90 CONTINUE
    QMIN1(J)=Q(J)+SSUM
    QMAX1(J)=Q(J)+SSUM1
80 CONTINUE
  DO 100 I=1,N1
    IF(QMAX1(I).NE.0.0) THEN
      Nmax1(I)=DABS(QMAX1(I))*LAMDA
    ELSE
      Nmax1(I)=0.0
    ENDIF
    IF(QMAX1(I).LT.0.0D0) Nmax1(I)=-Nmax1(I)
    IF(Qmin1(I).NE.0.0) THEN
      Nmin1(I)=DABS(Qmin1(I))*LAMDA
    ELSE
      Nmin1(I)=0.0
    ENDIF
    IF(Qmin1(I).LT.0.0) Nmin1(I)=-Nmin1(I)
100 CONTINUE
111 CONTINUE
  K=0
  DO 110 I=1,N1
    DO 120 J=1,MD
      K=K+1
      if(dial(j,i).ge.0.0)then
        Mmax1(K)=NUM1(J,i)*Nmax1(I)
        Mmin1(K)=NUM1(J,i)*Nmin1(I)
      else
        mmax1(k)=-1.0
        mmin1(k)=-1.0
      endif
120 CONTINUE
110 CONTINUE
  DO 130 J=1,n
    DO 135 I=1,N1
      DO 140 K=1,MD
        ADUAL(J,(I-1)*MD+K)=-L(J,I)*Mmax1((I-1)*MD+K)
        ADUAL(J,nvar+(I-1)*MD+K)=-L(J,I)*Mmin1((I-1)*MD+K)
140 CONTINUE
135 CONTINUE
130 CONTINUE
  DO 150 J=n+1,n+MP
    DO 155 I=1,N1
      DO 160 K=1,MD
        ADUAL(J,(I-1)*MD+K)=-P(J-n,I)*Mmax1((I-1)*MD+K)
        ADUAL(J,nvar+(I-1)*MD+K)=-P(J-n,I)*Mmin1((I-1)*MD+K)
160 CONTINUE
155 CONTINUE
150 CONTINUE
  k=0
  imatsz=0
  do 81 j=1,mac
    matbeg(j)=k

```



```

&      hp,leng,CDUAL,BDUAL,adual,prdual,n,mp,n1,md,nvar,
&      num1,lb,az,l,c,ii,p,dia,cpump)
IMPLICIT NONE
INTEGER  N,MP,N1,MD,NVAR
integer  l(n,n1),p(mp,n1),ii(n1,nvar),
&      i,j,k,kk
double precision  hp(mp),leng(n1),cdual(2*nvar),
&      bdual(n+mp+n1),adual(n+mp+n1,2*nvar),
&      prdual(2*nvar,n+mp+n1),cpump(md,n1),
&      lb(n+mp+n1),az(n+mp+n1,nvar),
&      c(nvar),
&      dia(md,n1),
&      NUM1(MD,n1),FAC,HW,LAMDA,ALPHA,BETA,BCOST,ssum
INTRINSIC MOD
K=0
DO 10 I=1,N1
DO 20 J=1,MD
  K=K+1
  if(dia(j,i).gt.0.0)then
    C(K)=BCOST*(DIA(J,i)**BETA)
  else
    if(dia(j,i).eq.0.0)then
      c(k)=1.0d10
    else
      c(k)=cpump(j,i)
    endif
  endif
20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 I=1,MD
DO 31 j=1,n1
  if(dia(i,j).gt.0.0) then
    DIA(I,j)=DIA(I,j)**(-ALPHA)
    NUM1(I,j)=FAC*DIA(I,j)*HW**(-LAMDA)
  else
    if(dia(i,j).eq.0.0) then
      num1(i,j)=1.0
    else
      num1(i,j)=-1.0
    endif
  endif
31 CONTINUE
30 CONTINUE
DO 40 I=1,N1
DO 50 J=1,nvar
  II(I,J)=0
50 CONTINUE
40 CONTINUE
DO 61 J=1,N1
DO 71 I=1,MD
  II(J,(J-1)*MD+I)=1
71 CONTINUE
61 CONTINUE
DO 80 I=1,n1
DO 90 J=1,nvar
  AZ(I+n+MP,J)=-II(I,J)
90 CONTINUE
80 CONTINUE
DO 100 I=1,n

```



```

COMMON /IMAT/ I
COMMON /PMAT/ P
COMMON /DIAVEC/ DIA
COMMON /NOGS/ NOG
INTEGER n,ml,MP,N1,MD,NVAR
PARAMETER (ml=3,N1=34,MP=31,MD=6)
PARAMETER (nvar=n1*md)
  integer nog,sp(mp),l(ml,n1),p(mp,n1),ii(n1,nvar)
  integer iloadp,iopt,isolut,ifrees,ifreep,
&      sepopt,ssingl,seprhs,sepmrk,sscaim,sobjll
  integer I,J,K,imat,imatsz,status
  double precision cpump(md,n1),
& lb(ml+mp+n1),az(ml+mp+n1,nvar),
& ql(n1),xso(nvar),q(n1),c(nvar),new,
& dia(md,n1),numl(md,n1),mnm(nvar),nm(n1),toos,toob
DOUBLE PRECISION F,G(N),X(N),
& OBJ,FAC,LENG(n1),dso(ml+mp+n1),
& AJX(NVAR),
& AJXX(NVAR),MAT(NVAR,N1),
& MATI(N1,n1),PL(N1),PP(N1),
& GG(N1),PVEC(N1),SSUM1
  integer      mac
  parameter    (mac=nvar)
  integer      mar
  parameter    (mar=ml+mp+n1)
  integer      macsz
  parameter    (macsz=mac)
  integer      marsz
  parameter    (marsz=mar)
  integer      matsz
  parameter    (matsz=mac*mar)
  integer      cstsz
  parameter    (cstsz=macsz*3+1)
  integer      rstsz
  parameter    (rstsz=marsz*3+1)
  integer      cex
  parameter    (cex=macsz-mac)
  integer      rex
  parameter    (rex=marsz-mar)
  double precision INFBND
  parameter (INFBND = 1.0e+20)
  integer      objsen / 1 /
  double precision objx(macsz)
  double precision rhsx(marsz)
  character*1  senx(marsz)
  integer      matbeg(macsz)
  integer      matcnt(macsz)
  integer      matind(0:matsz-1)
  double precision matval(0:matsz-1)
  double precision bdl(macsz)
  double precision bdu(macsz)
  character*3  datanm / ' ' /
  character*3  objnm / ' ' /
  character*3  rhsnm / ' ' /
  character*3  rngnm / ' ' /
  character*3  bndnm / ' ' /
  character*3  cstore(macsz) / macsz* ' ' /
  character*3  rstore(marsz) / marsz* ' ' /
  character*3  estore(1)

```

```

integer      idummy(1)
double precision ddummy(1)
integer      namlen      / 3 /
integer      lpstat
double precision  obj
double precision  xs(macsZ)
double precision  ds(marsZ)
double precision  slack(marsZ)
double precision  dj(macsZ)
INTRINSIC DABS,DMAX1,MOD
DO 10 I=1,N1
  SSUM1 = 0.0D0
DO 20 J=1,n
  SSUM1=SSUM1+X(J)*L(J,I)
20 CONTINUE
ql(i)=ssum1+q(i)
10 CONTINUE
DO 100 I=1,N1
  IF(QI(I).NE.0.0) THEN
    Nm(I)=DABS(QI(I))*1.85
  ELSE
    Nm(I)=0.0
  ENDIF
  IF(QI(I).LT.0.0D0) Nm(I)=-Nm(I)
100 CONTINUE
K=0
DO 110 I=1,N1
DO 120 J=1,MD
  K=K+1
  if(dia(j,i).ge.0.0)then
    Mm(K)=NUM1(J,i)*Nm(I)
  else
    mm(k)=-1.0
  endif
120 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 130 J=1,n
DO 135 I=1,N1
DO 140 K=1,MD
  Az(J,(I-1)*MD+K)=-L(J,I)*Mm((I-1)*MD+K)
140 CONTINUE
135 CONTINUE
130 CONTINUE
DO 150 J=n+1,n+MP
DO 155 I=1,N1
DO 160 K=1,MD
  Az(J,(I-1)*MD+K)=-P(J-n,I)*Mm((I-1)*MD+K)
160 CONTINUE
155 CONTINUE
150 CONTINUE
k=0
imatsz=0
do 81 j=1,mac
matbeg(j)=k
imat=0
do 82 i=1,mar
if (az(i,j) .ne. 0.0 ) then
matval(k)=az(i,j)
matind(k)=i-1

```

```

    imat=imat+1
    imatsz=imatsz+1
    k=k+1
    endif
82 continue
    matcnt(j)=imat
81 continue
    do 83 i=1,mac
        bdl(i)=0.0
        bdu(i)=INFBND
        objx(i)=c(i)
83 continue
    do 84 i=1,mar
        rhsx(i)=lb(i)
84 continue
    do 85 i=1,n
        senx(i)='E'
85 continue
    do 86 i=n+1,n+mp
        if(sp(i-n).eq.0) senx(i)='E'
        if(sp(i-n).eq.1) senx(i)='G'
        if(sp(i-n).eq.2) senx(i)='L'
86 continue
    do 87 i=n+mp+1,n+mp+n1
        senx(i)='E'
    do 88 k=1,md-1
        if(dia(k,i-n-mp).lt.0.0)then
            senx(i)='G'
        endif
88 continue
87 continue
    status = iloadp ('net'//char(0),
    . mac, mar, 0, objsen, objx, rhsx,
    . senx, matbeg, matcnt, matind, matval,
    . bdl, bdu, idummy, idummy, idummy, idummy, idummy,
    . idummy, ddummy, datanm//char(0), objnm//char(0),
    . rhsnm//char(0), rgnm//char(0), bndnm//char(0),
    . cstore, rstore, estore, macsz, marsz, matsz,
    . 0, 0, cstsz, rstsz, 0, namlen)

    status = iopt ()
    status = isolut (lpstat, obj, xs, ds, slack, dj,
    . 1, 1, 1, 1, 1 )
    f=obj
    do 410 i=1,nvar
        xso(i)=xs(i)
410 continue
    do 415 i=1,n+mp+n1
        dso(i)=ds(i)
415 continue
    if (lpstat .ne. 1) then
        f=1.0d10
    endif
    status = ifrees()
    status = ifreep()
C
C end of computing function value. if subgradient is not needed:return
C
    IF (NOG.EQ.0) RETURN

```

```

K=0
C
C start computing subgradient at the current point
C
DO 101 I=1,N1
  IF(QI(I).NE.0.0) THEN
    Nm(I)=DABS(QI(I))**0.85
  ELSE
    Nm(I)=0.0
  ENDIF
c  if(ql(i).lt.0.0) then
c  nm(i)=-nm(i)
c  endif
101 CONTINUE
DO 170 J=1,N1
DO 180 I=1,MD
  K=K+1
  if(dia(i,j).gt.0.0) then
    AJX(K)=3.691D-2 * DIA(I,j) * nm(j)
  else
    ajx(k)=0.0d0
  endif
180 CONTINUE
170 CONTINUE
DO 190 J=1,nvar
  AJXX(J)=AJX(J)*XSO(J)
190 CONTINUE
DO 209 J=1,N1
DO 210 I=1,nvar
  MAT(I,J)=0.0D0
210 CONTINUE
209 CONTINUE
K=0
DO 220 J=1,N1
DO 230 I=1,MD
  K=K+1
  MAT(K,J)=AJXX(K)
230 CONTINUE
220 CONTINUE
DO 240 J=1,N1
DO 250 I=1,N1
  SSUM1=0.0D0
DO 260 K=1,nvar
  SSUM1=SSUM1+PI(I,K)*MAT(K,J)
260 CONTINUE
  MATI(I,J)=SSUM1
250 CONTINUE
240 CONTINUE
DO 270 J=1,N1
  SSUM1=0.0D0
DO 280 K=1,n
  SSUM1=SSUM1+DSO(K)*L(K,J)
280 CONTINUE
  PL(J)=SSUM1
270 CONTINUE
DO 290 J=1,N1
  SSUM1=0.0D0
DO 300 K=n+1,n+MP
  SSUM1=SSUM1+DSO(K)*P(K-n,J)

```



```

END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC
SUBROUTINE PDUAL(BOXLL,BOXUU,BDUAL,CDUAL,
& OBJ,LAMDA,ep,fmin,prdual)
IMPLICIT NONE
common /numvec/ num1
common /spvec/ sp
COMMON /CPUMPMAT/ cpump
COMMON /LBVEC/ LB
COMMON /AZMAT/ AZ
COMMON /QLVEC/ QL
COMMON /XSOVEC/ XSO
COMMON /QVEC/ Q
COMMON /LVEC/ L
COMMON /CVEC/ C
COMMON /IMAT/ II
COMMON /PMAT/ P
COMMON /DIAVEC/ DIA
COMMON /NOGS/ NOG
common /d1/ dial
INTEGER N,MP,N1,MD,NVAR
PARAMETER (n=3,N1=34,MP=31,MD=6)
PARAMETER (NVAR=n1*md )
integer nog,sp(mp),l(n,n1),p(mp,n1),ii(n1,nvar)
double precision cpump(md,n1),
& prdual(2*nvar,n+mp+n1),
& lb(n+mp+n1),az(n+mp+n1,nvar),
& ql(n1),xso(nvar),q(n1),c(nvar),
& dial(md,n1),dia(md,n1),toos,toob,new
integer iloadp,iopt,isolut,ifrees,
& ifreep,sepopt,ssingl,seprhs,sepmrk,sscain,sobjll,gobjll
integer imat,imatsz,status
INTEGER I,J,K,kk
DOUBLE PRECISION BOXLL(N),BOXUU(N),ep,fmin,lo,
& LAMDA,
& TABL(n,N1),TABU(n,N1),
& QMIN1(N1),QMAX1(N1),NUM1(MD,n1),Nmax1(N1),nmin1(n1),
& mmax1(nvar),mmin1(nvar),
& BDUAL(n+MP+n1),
& CDUAL(2*NVAR),SSUM,SSUM1
integer mac
parameter (mac=n+mp+n1)
integer mar
parameter (mar=2*nvar)
integer macsz
parameter (macsz=mac)
integer marsz
parameter (marsz=mar+1)
integer matsz
parameter (matsz=mac*mar)
integer cstsz
parameter (cstsz=macsz*3+1)
integer rstsz
parameter (rstsz=marsz*3+1)
integer cex
parameter (cex=macsz-mac)
integer rex
parameter (rex=marsz-mar)

```

```

double precision INFBND
parameter (INFBND = 1.0e+20)
integer      objsen      / 1 /
double precision objx(macsz)
double precision rhsx(marsz)
character*1  senx(marsz)
integer      matbeg(macsz)
integer      matcnt(macsz)
integer      matind(0:matsz-1)
double precision matval(0:matsz-1)
double precision bdl(macsz)
double precision bdu(macsz)
character*3  datanm      / ' ' /
character*3  objnm       / ' ' /
character*3  rhsnm       / ' ' /
character*3  rgnm        / ' ' /
character*3  bndnm       / ' ' /
character*3  cstore(macsz) / macsz* ' ' /
character*3  rstore(marsz) / marsz* ' ' /
character*3  estore(1)
integer      idummy(1)
double precision ddummy(1)
integer      namlen      / 3 /
integer      lpstat
double precision obj
double precision x(macsz)
double precision pi(marsz)
double precision slack(marsz)
double precision dj(macsz)
INTRINSIC DABS,MOD
DO 60 J=1,N1
DO 70 I=1,n
  IF(L(I,J).EQ.1) THEN
    TABU(I,J)=BOXUU(I)
    TABL(I,J)=BOXLL(I)
  ENDIF
  IF(L(I,J).EQ.-1) THEN
    TABU(I,J)=-BOXLL(I)
    TABL(I,J)=-BOXUU(I)
  ENDIF
  IF(L(I,J).EQ.0) THEN
    TABU(I,J)=0.0D0
    TABL(I,J)=0.0D0
  ENDIF
70 CONTINUE
60 CONTINUE
DO 80 J=1,N1
  SSUM=0.0
  SSUM1=0.0
DO 90 I=1,n
  SSUM=SSUM+TABL(I,J)
  SSUM1=SSUM1+TABU(I,J)
90 CONTINUE
  QMIN1(J)=Q(J)+SSUM
  QMAX1(J)=Q(J)+SSUM1
80 CONTINUE
DO 100 I=1,N1
  IF(QMAX1(I).NE.0.0) THEN
    Nmax1(I)=DABS(QMAX1(I))*LAMDA

```

```

ELSE
  Nmax1(I)=0.0
ENDIF
IF(QMAX1(I).LT.0.0D0) Nmax1(I)=-Nmax1(I)
IF(Qmin1(I).NE.0.0) THEN
  Nmin1(I)=DABS(Qmin1(I))*LAMDA
ELSE
  Nmin1(I)=0.0
ENDIF
IF(Qmin1(I).LT.0.0) Nmin1(I)=-Nmin1(I)
100 CONTINUE
111 CONTINUE
K=0
DO 110 I=1,N1
DO 120 J=1,MD
  K=K+1
  if(dial(j,i).ge.0.0)then
    Mmax1(K)=NUM1(J,i)*Nmax1(I)
    Mmin1(K)=NUM1(J,i)*Nmin1(I)
  else
    mmax1(k)=-1.0
    mmin1(k)=-1.0
  endif
120 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 130 J=1,n
DO 135 I=1,N1
DO 140 K=1,MD
  prDUAL((I-1)*MD+K,j)=-L(J,I)*Mmax1((I-1)*MD+K)
  prDUAL(nvar+(I-1)*MD+K,j)=-L(J,I)*Mmin1((I-1)*MD+K)
140 CONTINUE
135 CONTINUE
130 CONTINUE
DO 150 J=n+1,n+MP
DO 155 I=1,N1
DO 160 K=1,MD
  prDUAL((I-1)*MD+K,j)=-P(J-n,I)*Mmax1((I-1)*MD+K)
  prDUAL(nvar+(I-1)*MD+K,j)=-P(J-n,I)*Mmin1((I-1)*MD+K)
160 CONTINUE
155 CONTINUE
150 CONTINUE
k=0
imatsz=0
do 81 j=1,mac
matbeg(j)=k
imat=0
do 82 i=1,mar
if (prdual(i,j) .ne. 0.0 ) then
matval(k)=prdual(i,j)
matind(k)=i-1
imat=imat+1
imatsz=imatsz+1
k=k+1
endif
82 continue
matcnt(j)=imat
81 continue
do 83 i=1,mac
if(i.le.n) then

```

```

bdl(i)=-INFBND
bdu(i)=INFBND
endif
  if(i.gt.n.and.i.le.n+mp) then
    bdl(i)=0.0
bdu(i)=INFBND
endif
  if(i.gt.n+mp) then
bdl(i)=-INFBND
bdu(i)=INFBND
endif
  objx(i)=-bdual(i)
83 continue
  do 84 i=1,mar
    rhsx(i)=cdual(i)
84 continue
  do 85 i=1,mar
    senx(i)='L'
85 continue
  status = iloadp ('netd'//char(0),
. mac, mar, 0, objsen, objx, rhsx,
. senx, matbeg, matcnt, matind, matval,
. bdl, bdu, idummy, idummy, idummy, idummy, idummy,
. idummy, ddummy, datanm//char(0), objnm//char(0),
. rhsnm//char(0), rngnm//char(0), bndnm//char(0),
. cstore, rstore, estore, macsz, marsz, imatsz,
. 0, 0, cstsz, rstsz, 0, namlen)
status = iopt ()
  status = isolut (lpstat, obj, x, pi, slack, dj,
. 1, 1, 1, 1, 1 )
  if(lpstat.ne.1) write(*,*) lpstat
obj=-obj
status = ifrees()
status = ifreep()
  if(status .ne. 0 ) write(*,*)'unlod',status
RETURN
END

```

References

- [1] Alperovits E., *Design and Operation of Water Distribution Systems*, Research Thesis, Technion - Israel Institute of Technology, 1976.
- [2] Alperovits E., Shamir U., "Design of optimal water distribution system", *Water Resour. Res.*, 13(6), 885-900, 1977.
- [3] Boulos F. P., Wood D. J., *KYPIPE. A comprehensive pipe distribution network analyzer. User's manual.*, Civil Engineering Software Center, University of Kentucky, College of Engineering, Lexington, Kentucky, 40506-0046, 1990.
- [4] Cembrovicz R. G., Harrington J. J., "Capital cost minimization of hydraulic network", *Proc. of the ASCE*, 99 (HY3), 1973.
- [5] Cheney E. W., Goldstein A. A., "Newton's method for convex programming and Chebycheff approximation", *Numerische Mathematik 1*, 253 - 268, 1959.
- [6] Clarke F. H., *Optimization and nonsmooth analysis*, "Wiley-Interscience, 1983.
- [7] Deo E., *Graph theory with application to engineering and computer science*, Prentice - Hall, 1974.
- [8] Eiger G., Ben-Tal A., Outrata J., Zowe J., "A nondifferentiable approach to decomposable optimization problems with an application to the design of water distribution networks", to appear, 1991.
- [9] El-Bahrawy A., Smith A. A., "Application of MINOS to water collection and distribution networks", *Civ. Eng. Sys. Vol. 2*, 1985.
- [10] Fiacco A. V., *Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming*, Academic Press, 1983.
- [11] Fujiwara O. et al., "A modified linear programming gradient method for optimal design of looped water distribution networks", *Water Resour. Res.*, 23 (6), 977 - 982, 1987.
- [12] Fujiwara O., Khang D. B., "A two - phase decomposition method for optimal design of looped water distribution networks", *Water Resour. Res.*, Vol. 26 (4), 539 - 549, 1990.
- [13] Gauvin J., Dubeau F., "Differential properties of the marginal function in mathematical programming", *Math. Prog. Study*, 19, 101 -119, 1982.
- [14] Gessler J., "Optimization of pipes networks", paper presented at *Proceeding of 9th Intl. Symp. on Urban Hydrology, Hydraulic and Sediment Control*, Univ. of Kentucky, Lexington, 1982.
- [15] Goulter I. C., Lussier B. M., Morgan D.R., "Implications of head loss path choice in the optimization of water distribution network", *Water Resour. Res.*, 22 (5), 819 - 822, 1986.
- [16] Jacoby S. L. S., "Design of optimal hydraulic networks", *Proc. of the ASCE*, 99 (HY9),

1973.

- [17] **Howard C.**, *Water distribution network analysis. SDP10. User's manual.*, Charles Howard & Associates Ltd., Professional Engineers., April 1986.
- [18] **Kally E.**, "Computerized planning of least cost water distribution network", *Water and Water Engineering*, 75 (902), 1971.
- [19] **Karmeli et al.**, "Design of optimal water distribution network", *Proc. of ASCE*, 94 (PL1), 1968.
- [20] **Kelley J. E.**, "The cutting plane method for solving convex programs", *SIAM J.* 8 (1960), 703 - 712.
- [21] **Kessler A.**, *Optimal Design of Water Supply Networks Using Graph Theory*, Reasearch Thesis, Technion - Israel Institute of Thecnology, 1988.
- [22] **Kessler A., Shamir U.**, "Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks", *Water resour. Res.*, 25 (7), 1469 - 1480, 1989.
- [23] **Kiwiel K. C.**, *Methods of descent for nondifferentiable optimization*, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1985.
- [24] **Kiwiel K. C.**, "Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable optimization", *Mathematical Programming* 46, 105-122, 1990.
- [25] **Kohlhass C., Mattern D. E.**, "An algorithm of obtaining optimal looped pipe distribution networks", in: *Paper of the 6th Annual Symp. of the Applications of Computers to the Problems of the Urban Society, Asso. of Computing Machinery*, New York, 1971.
- [26] **Lai D., Schaake J.**, "Linear programming and dynamic programming application to water distribution network design", *Rep. 16, Dept. of Civil Eng., MIT, Mass.*, 1969.
- [27] **Lemarechal C., Strodiot J. J., Bihain A.**, "On a bundle algorithm for nonsmooth optimization", in: *Nonlinear Programming 4*, edited by Mangasarian O. L., Meyer R. R., Robinson S. M., Academic Press, New York, 1981.
- [28] **Lemarechal C.**, "Nondifferentiable optimization", in: *Handbooks in operations research and management science, Volume 1, Optimization*, Edited by Nemhauser G. L., Rinnooy Kan A. H. G., Todd M. J., North Holland, Amsterdam, 1989.
- [29] **Mifflin R.**, "An algorithm for constrained optimization with semismooth functions", *Mathematics for Operations Research* 2, 191 - 207, 1977.
- [30] **Morgan D. R., Goulter R. C.**, "Optimal urban water distribution design", *Water Resour. Res.*, 21 (5), 642 - 652, 1985.
- [31] **Murtagh B. A., Saunders M. A.**, "A projected Lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints", *Systems Optimization Laboratory, Dept. of Operations Research, Stanford Univ.*, 1981.

- [32] **Outrata J. V.**, "On generalized gradients in optimization problems with set value constraints", *Math. Oper. Res.*, 15, 626 - 639, 1990.
- [33] **Pitchai R. A.**, *Model for designing water distribution pipe networks*, PHD Thesis, Harvard Univ., 1966.
- [34] **Poljak B. T.**, *Subgradient methods: A survey of Soviet research*, in: Nonsmooth Optimization, Edited by Lemarechal C., Mifflin R., Pergamon Press, Oxford, 5 - 29, 1978.
- [35] **Quindry G. E. et al.**, "Comment on 'Design of optimal water distribution system ' by Alperovits E. and Shamir U.", *Water Resour. Res.*, 15 (6), 1651 - 1654, 1979.
- [36] **Quindry G. E. et al.**, "Optimization of looped water distribution systems", *J. Environ. Eng., ASCE*, 107 (EE4), 665 - 667, 1981.
- [37] **Rockafellar R. T.**, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1972.
- [38] **Rockafellar R. T.**, "Directional differentiability of the optimal value function in a nonlinear programming problem", *Math. Prog. Study*, 21, 213 - 226, 1984.
- [39] **Rosen J. B.**, "The gradient projection method for nonlinear programming: Part 1, Linear constraints", *SIAM J. Appl. Math.*, 8, 181 - 217, 1960.
- [40] **Rowell W. F., Barnes J. W.**, "Obtaining layout of water distribution network", *Proc. of the ASCE*, 108 (HY1), 1982.
- [41] **Saphir Y. N.**, *Optimization of water distribution systems*, (in Hebrew), M.Sc. Thesis in Operations Research, Technion - Israel Institute of Technology, 1983.
- [42] **Schramm H.**, *Eine kombination von bundle und trust - region verfahren zur losung nichtdifferenzierbarer optimierungsprobleme*, Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 30, Bayreuth, 1989.
- [43] **Schramm H., Zowe J.**, "A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results", *Rep. No. 206, 1990, to appear in SIAM Journal on Optimization (SIOPT)*, 1991.
- [44] **Schramm H.**, "Bundle trust methods: Fortran codes for nondifferentiable optimization user guide", *Technical Rep. University of Byreuth, Germany*, 1991.
- [45] **Shamir U.**, "Optimal design and operation of water distribution Systems", *Water Resour. Res.*, 11 (4), 1974.
- [46] **Shor N. Z.**, *Minimization methods for nondifferentiable functions*, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg, 1985.
- [47] **Studniarski M.**, *An algorithm for calculating one subgradient of a convex function of two variables*, Preprint, University of Lodz, 1989.

- [48] **Walski T. M.**, "State-of-the-Art Pipe network optimization", *Research Rep., Civil Engineer, U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss. 39180*, 1985.
- [49] **Walski T. M. et al.**, "Battle of the network models: Epilogue", *J. Water Resour. Planning and Management, Vol. 2*, 1987.
- [50] **Watanatada T.**, "Least cost design of water distribution systems", *Proc. of the ASCE, 99 (HY9)*, 1973.
- [51] **Wolfe Ph.**, "A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable convex functions", *Mathematical Programming Study 3*, 145 - 173, 1975.
- [52] **Zowe J.**, "Nondifferentiable optimization - A motivation and a short introduction into the subgradient and the bundle concept", *NATO ASI, Vol. F15, Computational Mathematical Programming, Edited by K. Schittkovski, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg*, 321 - 356, 1985.
- [53] **Rinnooy Kan A. H. G., Timmer G. T.**, *Global Optimization*, In: *Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1. OPTIMIZATION*, Nemhauser, Rinnooy Kan, Todd, Editors, North-Holland.
- [54] **Bank B. et. al.**, "Non-Linear Parametric Optimization", Birkhauser Verlag, 1983.

OPTIMAL DESIGN OF WATER DISTRIBUTION
NETWORKS

RESEARCH THESIS

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE

GIDEON EIGER

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Tishrei 5752

HAIFA

SEPTEMBER 1991

OPTIMAL DESIGN OF WATER DISTRIBUTION NETWORKS

RESEARCH THESIS

SUBMITTED IN PARTIAL FULLFILMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE

GIDEON EIGER

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Tishrei 5752

HAIFA

SEPTEMBER 1991

THIS RESEARCH WAS CARRIED OUT IN THE FACULTY OF INDUSTRIAL ENGINEERING AND MANAGEMENT UNDER THE SUPERVISION OF PROFESSOR AHARON BEN-TAL AND PROFESSOR URI SHAMIR.

ACKNOWLEDGEMENTS:

I would like to thank Professor Aharon Ben-Tal and Professor Uri Shamir for their superior guidance, for their help and support and for a most friendly attitude, which made this research to be a pleasant experience for me.

To Miriam,
Dganit, Shai, Shirly and Dror
for their help and patience.

CONTENTS

Chapter		Page
	Abstract	1
	List of symbols and abbreviations	3
1	Introduction	7
2	Water distribution network - the optimal design problem	10
3	Literature survey	12
3.1	Simultaneous solution of heads and flows	13
3.2	Solution of flows for given fix set of heads	14
3.3	Solution of heads for given fix set of flows	14
4	Mathematical model	18
5	Nonsmooth optimization	24
5.1	Nonsmooth problems	24
5.2	Nonsmooth methods	25
5.3	Algorithm BT - the convex case	29
5.4	Algorithm BT - the nonconvex case	30
5.5	Algorithm BT - linear constraints	31
6	Computing a subgradient	33
6.1	The generalized subgradient of marginal functions	33
6.2	The case of parametric linear programming	35
6.3	Subgradient in the design problem	37
7	Theoretical basis for the solution	38
7.1	The dual problem	38
7.2	Reducing the duality gap	42
8	An algorithm for global solution of the problem	48
8.1	Input	49
8.2	Global search	51
8.3	Criterion for locating initial points for local search	53
8.4	Improving the accuracy - strategy	53
8.5	Output	54
8.6	Algorithm	55
9	Including more hydraulic elements in the model	59
9.1	Pumps and reservoirs	59
9.2	Designing for two loads condition	61
9.3	Adding one more constraint	62

CONTENTS (cont.)

Chapter		Page
10	Numerical examples	64
10.1	Problem no. 1 "TWO-LOOP"	65
10.2	Problem no. 2 "HANOI"	72
10.3	Problem no. 3 "COMPLEX-TWO-LOOP"	83
10.4	Problem no. 4 "BIG"	89
11	Summary and conclusions	100
	Appendix A. Fortran code of the algorithm	101
	References	127

Abstract

The general planning of water distribution network, consists of the following three phases:

1. Basic planning, in which the network is defined and all the sources and consumers are fixed with their relevant parameters (water supply in the sources and demand at the consumption nodes, allowed heads limits etc.).
2. Design phase, in which, one has to find the optimal physical elements of the network (pipes types and diameters, pumps sizes, average water level in reservoirs, valves locations etc.). This should be done according to data and specifications that were obtained in the basic planning phase, taking into consideration the expected operation conditions.
3. Operation phase, in which the optimal operation policy is found and applied.

The three stages are not independent and the planning is usually being done iteratively.

In this work we formulate a mathematical model of the design problem and solve it under the assumption that we have all the relevant data and the operation conditions are known.

The decision variables in our model are:

1. A vector x , whose components are the lengths of pipe segments of all possible diameters at the network parts, head increments at the pumping stations and the water level of the reservoirs.
2. A vector q , represents the flow distribution (by size and direction) over the network.

The mathematical programming problem that we have to solve is characterized by the following properties:

1. It is a nonconvex nonsmooth problem.
2. For any given possible q , it is a linear problem in the variable x .

From a literature survey of existing solution methods for the design problem, we could point out four difficulties that we set up to resolve.

1. The trials to solve simultaneously for both q and x variables, fail usually because of the high dimension of the problem and the nonconvexity.
2. The master problem arising from a decomposition approach, in which the minimization in x and q is being done in two stages, is a nonsmooth one.
3. Almost all the methods find at best a local solution and there is no global search, or an even estimate to evaluate the quality of the local solution.
4. In the current method, the direction of flow is in general being fixed initially, and there can be no change during the solution process. This fact excludes large part of the feasible region from any consideration.

The contribution of this work is mainly in overcoming the above mentioned drawbacks.

We present an algorithm which produces an approximate global solution and at the same time produces a tight lower bound, which enables one to estimate the approximation error and to reduce it to a prescribed user supplied value.

In order to achieve these goals efficiently, we had to address two basic issues:

1. Finding effective way to solve the dual problem, which by itself is a hard one because it has infinitely many constraints.
2. Generating a method to decrease the duality gap, existing between primal and dual optimal values, due to the nonconvexity of the primal problem.

Both these problems were successfully solved due to certain mathematical properties of the model.

The main optimization tool in the solution process (particularly the solution of the dual problem) is an LP software package. The basic global search process is of the "branch and bound" type, and for local search (minimization of nonsmooth, nonconvex function) we use a Bundle-Trust algorithm. In fact the LP software is an important tool in the local search as well.

We have tested our algorithm on several example problems (that were taken from the literature) which differ from one another by dimension and complexity. The algorithm was found to perform well for all these example problems. The time needed to solve a given problem to a certain level of accuracy is of course depending on the problem size. We were able to define and use some strategy and control parameters which can, after some tuning, reduce the computing time.

Finally we note that our approach is in no way limited to the network design problem. Other problems of "double minimization" form, can be solved by the same approach, if only they possess certain monotonicity and separability properties.